MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY †
G. HERGLOTZ H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

51. BAND 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 7. DEZEMBER 1948)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1948

Math.
Z.

Preis M 14.40

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16.
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6.
R. Nevanlinna, Helsinki,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstr. 4.

51. Band. **Inhalt:** 4. Heft.

Seite

Bückner, Dr. H., Göttingen, Merkelstr. 3: Über Konvergenzsätze, die sich bei der Anwendung eines Differenzenverfahrens auf ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem ergeben 423

Sprague, R., Berlin-Charlottenburg 2, Schillerstr. 15: Über Zerlegungen in n-te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen 466

Dinghas, Prof. Dr. A., Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8, Mathematisches Institut: Neuer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung von Bol 469

Müller, Prof. Dr. M., Tübingen, Mathematisches Institut der Universität: Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung 474

van der Waerden, Prof. Dr. B. L., Laren/Holland, Verlengde Engweg 10: Über einfache Punkte von algebraischen Mannigfaltigkeiten 497

van der Waerden, Prof. Dr. B. L., Laren/Holland, Verlengde Engweg 10: Birationale Transformation von linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten 502

Über Konvergenzsätze, die sich bei der Anwendung eines Differenzenverfahrens auf ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem ergeben[1]).

Von

H. Bückner in Göttingen.

Einleitung.

Es handelt sich um die bekannte selbstadjungierte Aufgabe

$$[r(x)y'(x)]' + (\lambda p(x) + q(x))y = 0 \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{2}$$

Die Funktionen $r(x)$, $p(x)$, $q(x)$ mögen im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzen. An einigen Stellen dieser Arbeit werden weitergehende Differenzierbarkeitsvoraussetzungen getroffen werden. Ich werde sie von Fall zu Fall formulieren. Ferner sei

$$0 < C_1 \leqq p \leqq C_2; \quad 0 < C_1 \leqq r \leqq C_2; \quad |q| \leqq C_2 \tag{3}$$

mit C_1 und C_2 als passend gewählten Konstanten. Nach dem bekannten Oszillationstheorem von STURM[2]) gibt es unendlich viele Eigenwerte. Alle sind reell und lassen sich als eine monoton gegen $+\infty$ wachsende Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ schreiben. Jeder Eigenwert ist einfach.

Zur Behandlung der Eigenwertaufgabe mit dem Differenzenverfahren teilen wir das Grundintervall $\langle a, b\rangle$ in n gleiche Teile der Länge

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Wir nennen h die Schrittweite. Bedeutet $f(x)$ eine beliebige Funktion im Grundintervall, so setzen wir zur Abkürzung

$$x_k = a + kh, \quad f_k = f(x_k), \quad \text{für } 0 \leqq k \leqq n.$$

[1]) Diese Arbeit enthält einen wesentlichen Teil meiner Habilitationsschrift. Die Habilitation erfolgte 1944 zu Darmstadt. Referenten waren die Herren Prof. Dr. L. COLLATZ und Prof. Dr. A. WALTHER. Besonders Herrn COLLATZ habe ich für die Problemstellung und sein ständiges Interesse an dieser Arbeit zu danken.

[2]) Vgl. E. KAMKE, Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Lpz. 1942, S. 266.

Man erkennt, daß der Index k den Funktionswert nur bei einer bestimmten Zahl n eindeutig kennzeichnet. Da jedoch alle in irgendeiner Relation vorkommenden Abkürzungen für die gleiche Zahl n oder die gleiche Schrittweite gelten werden, sind Irrtümer ausgeschlossen. Nunmehr setzen wir die Differenzengleichungen

$$\Delta(r_{i-1/2}\Delta F_{i-1}) + h^2(\Lambda^{(n)} p_i + q_i) F_i = 0 \tag{4}$$
$$i = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

an. Hierin bedeuten die Zeichen $F_0, F_1, \ldots F_n$ gesuchte Größen, welche den Randbedingungen

$$F_0 = F_n = 0 \tag{4'}$$

genügen sollen. Das Zeichen Δ kennzeichnet den bekannten Differenzenoperator. Es ist also

$$\Delta F_i = F_{i+1} - F_i, \quad \Delta(r_{i-1/2}\Delta F_{i-1}) = r_{i+1/2}(F_{i+1} - F_i) - r_{i-1/2}(F_i - F_{i-1})$$

Trägt man die Randbedingungen (4') in die Gleichungen (4) ein, so ergibt sich ein System von $(n-1)$ homogenen Gleichungen für die Unbekannten $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$. Es ist nur dann nichttrivial lösbar, wenn seine Determinante verschwindet. Diese Bedingung läßt sich auf die Form einer Säkulargleichung für $\Lambda^{(n)}$ bringen. Es existieren daher $(n-1)$ reelle Wurzeln

$$\Lambda_1^{(n)} \leqq \Lambda_2^{(n)} \leqq \ldots \leqq \Lambda_{n-1}^{(n)},$$

für welche die Determinante verschwindet. Diese Wurzeln nennen wir die Differenzeneigenwerte n-ter Ordnung. Eine zu $\Lambda_k^{(n)}$ gehörige Lösung des Systems homogener Gleichungen nennen wir eine Differenzeneigenlösung. Unter

$$F_0^{(n,k)}, F_1^{(n,k)}, \ldots, F_n^{(n,k)}$$

ist stets eine solche, $\Lambda_k^{(n)}$ entsprechende Lösung zu verstehen.

Die genannten Differenzengleichungen wurden erstmalig von Herrn Collatz[3]) untersucht. Von seinen Ergebnissen seien die folgenden hervorgehoben:

Die Zahlen $F_i^{(n,1)}$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ sind sämtlich von Null verschieden und besitzen einerlei Vorzeichen. Es besteht die Ungleichung

$$\Lambda_1^{(n)} \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\left(\frac{\Delta w_{i-1}}{h}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} q_i \cdot w_i^2}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot w_i^2}.$$

Dabei dürfen die Zahlen $w_0, w_1, \ldots, w_n$ bis auf die Bedingung $w_0 = w_n = 0$ beliebige Werte annehmen, aber nicht alle zugleich verschwinden. In

[3]) L. Collatz, Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. und 4. Ordnung. Deutsche Math. 2, Heft 2, S. 189—215.

er Ungleichung wird das Gleichheitszeichen nur für den Fall $w_i = F_i^{(n,1)}$ $= 0, 1, \ldots, n$) angenommen. Es gilt ferner die Abschätzung

$$|\lambda_1 - \Lambda_1^{(n)}| \leqq C_3 \cdot h^2$$

it einer von n unabhängigen Konstanten C_3. Danach konvergieren ie ersten Differenzeneigenwerte mit wachsender Ordnung gegen den rsten Eigenwert λ_1.

Die Untersuchungen dieser Arbeit haben weitergehende Konvergenzetrachtungen zum Gegenstand. Sie beziehen sich auf alle Differenzenigenwerte und auf alle Differenzeneigenlösungen eines allgemeineren ifferenzenverfahrens, welches die von Herrn Collatz untersuchten leichungen als Spezialfall enthält. Es handelt sich um die Gleichungen

$$\Delta(\bar{r}_{i-1/2}\Delta F_{i-1}) + h^2(\Lambda^{(n)} \cdot \tilde{p}_i + \tilde{q}_i) F_i = 0 \tag{5}$$

$$F_0 = F_n = 0 \tag{5'}$$

it gewissen Koeffizientenfunktionen $\bar{r}(x), \tilde{p}(x), \tilde{q}(x)$, deren Bedeutung n folgenden erläutert sei. Es ist zunächst

$$\begin{aligned} \bar{r}(x) &= r(x) + h^2 \cdot (\Lambda^{(n)} \cdot \sigma^{(n)}(x) + \tau^{(n)}(x)) \\ \tilde{p}(x) &= p(x) + h^2 \cdot \xi^{(n)}(x) \\ \tilde{q}(x) &= q(x) + h^2 \cdot \zeta^{(n)}(x)^4). \end{aligned} \tag{5''}$$

ierbei sind $\sigma^{(n)}, \tau^{(n)}, \xi^{(n)}, \zeta^{(n)}$ vier im Grundintervall $\langle a, b\rangle$ stetig definierte unktionen, die noch von n abhängen und mit wachsendem n gleichäßig konvergieren. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sigma^{(n)}(x) &= \sigma(x), \quad \lim_{n\to\infty} \tau^{(n)}(x) = \tau(x), \\ \lim_{n\to\infty} \xi^{(n)}(x) &= \xi(x), \quad \lim_{n\to\infty} \zeta^{(n)}(x) = \zeta(x). \end{aligned} \tag{5'''}$$

ie Funktionen $\bar{r}, \tilde{p}, \tilde{q}$ hängen, was wohl zu beachten ist, von n und m Teil auch von $\Lambda^{(n)}$ ab. Verschwinden die Funktionen $\sigma^{(n)}, \tau^{(n)}, \xi^{(n)}, \zeta^{(n)}$ entisch, so gehen die Gleichungen (5) in die Gleichungen (4) über. ese letzteren werden wir durch den Namen „normale Gleichungen“ d das entsprechende Differenzenverfahren als „normales“ Verfahren sonders hervorheben.

Die Gleichungen (5) enthalten $\Lambda^{(n)}$ linear. Sie sind nach Eintragen r Randbedingungen (5') nur dann nichttrivial lösbar, wenn die oeffizientendeterminante des entsprechenden Gleichungssystems verhwindet. Das ergibt eine algebraische Gleichung für $\Lambda^{(n)}$. Ihr Grad trägt im allgemeinen $(n-1)$. Sie besitzt, wie noch später gezeigt rden wird, lauter reelle Wurzeln, die wir der Größe nach ordnen,

$$\Lambda_1^{(n)} \leqq \Lambda_2^{(n)} \leqq \Lambda_3^{(n)} \leqq \ldots.$$

[4]) Noch allgemeiner wäre $\tilde{q}(x) = q(x) + h^2(\Lambda^{(n)}\eta^{(n)}(x) + \zeta^{(n)}(x))$. Die Einführung n $\eta^{(n)}$ ist aber bedeutungslos, da die Gleichungen (5) $\xi^{(n)}$ und $\eta^{(n)}$ nur in der rm $(\xi^{(n)} + \eta^{(n)})$ enthalten.

Unter

$$F_0^{(n,k)}, F_1^{(n,k)}, \ldots, F_n^{(n,k)}$$

verstehen wir eine zu $\Lambda_k^{(n)}$ gehörige nichttriviale Lösung der Gleichungen (5) und (5′). Die Bezeichnung Differenzeneigenwerte und Differenzeneigenlösungen behalten wir bei.

Die Berechnung der Wurzeln beim allgemeineren Verfahren ist nicht mit wesentlich mehr Rechenarbeit gegenüber dem normalen Verfahren verbunden. Wohl aber kann man hoffen, daß bei passender Wahl der vier Funktionen $\sigma^{(n)}, \tau^{(n)}, \xi^{(n)}, \zeta^{(n)}$ bessere Näherungen für die Eigenwerte des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems entstehen, als sie das normale Verfahren liefern kann. In der Tat ist eine solche Wahl möglich. Einige Ergebnisse dieser Arbeit sind:

Unter gewissen Voraussetzungen über die Funktionen σ, τ, ξ und existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_k - \Lambda_k^{(n)}}{h^2} = \omega_{kk}$$

$$= \frac{\int_a^b y_k^2 \cdot \left\{ \frac{(\lambda_k p + q)^2}{12\, r} - \frac{\lambda_k p + q}{r}(\lambda_k \sigma + \tau^*) + \lambda_k \xi + \zeta - \left[r \left(\frac{\lambda_k \sigma + \tau^*}{2\, r} \right)' \right]' \right\} dx}{\int_a^b p\, y_k^2\, dx}$$

$$\tau^* = \tau + \frac{r^2}{24} \left(\frac{1}{r} \right)'',$$

wobei y_k die zu λ_k gehörige Eigenfunktion ist. Im Falle der normalen Gleichungen kann auch

$$\omega_{kk} = \frac{\int_a^b y_k' \{ r\, y_k''' + (r\, y_k')'' \}\, dx}{24 \int_a^b p\, y_k^2\, dx}$$

geschrieben werden. Besonderes Interesse verdient der Spezialfall $\sigma^{(n)} \equiv \xi^{(n)} \equiv \zeta^{(n)} \equiv \tau^* \equiv 0$ mit

$$\omega_{kk} = \frac{\int_a^b \frac{(\lambda_k p + q)^2}{12\, r} \cdot y_k^2\, dx}{\int_a^b p\, y_k^2\, dx}.$$

Fast alle Differenzeneigenwerte $\Lambda_k^{(n)}$ liegen unterhalb λ_k. Für $q \equiv 0$ ist

$$\omega_{kk} = \frac{\lambda_k^2\, p(\bar{x})}{12\, r(\bar{x})}$$

mit $\bar{x}$ als geeigneter Abszisse. Auf Grund dieser Formel kann man einen verbesserten Differenzeneigenwert gemäß

$$\tilde{\Lambda}_k^{(n)} = \Lambda_k^{(n)} + h^2 \cdot \Lambda_k^{(n)2} \cdot \frac{p(\tilde{x})}{12\, r(\tilde{x})}$$

berechnen. Es stellt $\tilde{x}$ einen geschätzten Wert von $\bar{x}$ dar.

Ein nicht minder wichtiger Spezialfall entsteht, wenn

$$\sigma = \frac{p}{12}, \quad \tau = \frac{q}{12} - \frac{r^2}{24}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)'', \quad \xi = \left[r\cdot\left(\frac{p}{24\,r}\right)'\right]', \quad \zeta = \left[r\cdot\left(\frac{q}{24\,r}\right)'\right]'$$

esetzt wird. Es ist dann

$$\omega_{kk} = 0.$$

as Verfahren konvergiert also besonders stark, und unter zusätzlichen oraussetzungen läßt sich zeigen, daß sogar der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_k - \Lambda_k^{(n)}}{h^4}$$

istiert. Einige Rechenbeispiele am Schluß dieser Arbeit werden die aktische Bedeutung der beiden speziellen Verfahren unterstreichen.

Die in dieser Arbeit bewiesene Existenz der Grenzwerte ω_{kk} erlaubt , eine Verbesserungsmethode[5]) bei jedem beliebigen Spezialfall des fferenzenverfahrens anzuwenden, wenn mindestens zwei Differenzen- genwerte $\Lambda_k^{(n)}$ und $\Lambda_k^{(m)}$ bekannt sind. Näherungsweise gilt doch

$$(\lambda_{k'} - \Lambda_k^{(n)})\, n^2 \approx (\lambda_k - \Lambda_k^{(m)})\, m^2 \approx \omega_{kk}\,.\,(a-b)^2.$$

araus folgt

$$\lambda_k \approx \frac{\Lambda_k^{(m)}\,.\,m^2 - \Lambda_k^{(n)}\,.\,n^2}{m^2 - n^2}.$$

n Falle $\omega_{kk} = 0$, sind m^2 und n^2 durch die 4. Potenzen von m und n ersetzen. Numerische Beispiele auch hierfür am Schluß der Arbeit.

Die in dieser Arbeit entwickelten Methoden lassen sich auch auf dere Eigenwertprobleme anwenden.

§ 1.

Zusammenstellung von Hilfsmitteln.

Um die Ableitung der Hauptergebnisse dieser Arbeit möglichst über- htlich zu gestalten, sollen einige Hilfsmittel und Hilfssätze vor- ggenommen werden. Dies erscheint auch deswegen gerechtfertigt, il die Aussagen hierüber unabhängig vom Differenzenverfahren sind.

1. Das Eigenwertproblem.

Zu jedem Eigenwert λ_k gibt es eine bis auf einen konstanten Faktor ideutig bestimmte Eigenfunktion y_k. Durch die für alles folgende tgesetzte Normierung

$$\int_a^b p(x)\,y_k^2(x)\,d(x) = 1$$

sie nur noch bis auf einen Faktor vom Betrage Eins unbestimmt.

[5]) Auch Herr Collatz benutzt diese Methode. Vgl. ZaMM **14** (1934), S.317.

Wir entscheiden uns nun für eine der beiden möglichen Erscheinungsformen von y_k, so daß wir es im folgenden nur noch mit eindeutig festgelegten Eigenfunktionen zu tun haben.

Besitzen die Funktionen p, q, r stetige Ableitungen bis zur m-ten Ordnung, so ist jede Eigenfunktion $(m+1)$-mal stetig differenzierbar. Gleiches gilt für die Funktionen ry_k'. Die eingangs genannten Voraussetzungen besagen, daß m mindestens den Wert 2 haben muß.

Die Eigenfunktionen erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_a^b p y_k y_m \, dx = 0 \quad \text{für} \quad k \neq m.$$

Jede stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ des Grundintervalls, die den Randbedingungen $f(a) = f(b) = 0$ genügt, läßt sich auf genau eine Weise durch eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe aus den Eigenfunktionen darstellen,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k y_k(x)$$

mit den Koeffizienten

$$d_k = \int_a^b p f y_k \, dx.$$

Das System der Eigenfunktionen ist vollständig; d. h. es gibt keine stetige, nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$, für welche die vorstehend gebildeten Koeffizienten alle zugleich verschwinden.

Alle Eigenfunktionen bleiben ihrem Betrag nach unterhalb einer gemeinsamen Schranke. Es gilt also

$$|y_k| \leqq Y; \quad a \leqq x \leqq b; \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Auch läßt sich Y so bestimmen, daß die Abschätzungen

$$|y_k'| \leqq Y \cdot k; \quad a \leqq x \leqq b; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7'}$$

gelten[6]).

Die Differentialgleichung

$$(ry')' + y(\lambda_k p + q) = f(x) \tag{8}$$

mit einer stetigen Funktion $f(x)$ besitzt dann und nur dann eine die Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$ befriedigende Lösung, wenn

$$\int_a^b f y_k \, dx = 0 \tag{9}$$

ist. Die Lösung ist bis auf ein Vielfaches von y_k als additivem Glied eindeutig bestimmt.

---

[6]) R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Auflage. Springer, Berlin, S. 288.

2. Quadratische Formen [7]).

s seien

$$K(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \cdot u_i u_j, \quad H(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \cdot u_i \cdot u_j$$

$$k_{ij} = k_{ji} \qquad h_{ij} = h_{ji}$$

wei reelle quadratische Formen und von ihnen mindestens eine definit. Vir betrachten die Gleichung

10) $$\| k_{ij} - \varrho \cdot h_{ij} \| = 0$$

ür die Unbekannte ϱ; sie stellt zugleich die Bedingung für die nicht-riviale Lösbarkeit des Gleichungssystems

11) $$\sum_{j=1}^{n} (k_{ij} - \varrho h_{ij}) u_j = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ar. Die Gleichung (10) besitzt lauter reelle Wurzeln. Sind alle Wurzeln infach, so sind die entsprechenden nichttrivialen Lösungen von (11) is auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Hat aber (10) ine mehrfache Wurzel, so auch das System (11) eine dem Grad der Vielfachheit gleiche Anzahl linear unabhängiger Lösungen. Von nun b sei $H(u,u)$ als positiv definit angenommen. Dann kann man zu iner mehrfachen Wurzel von (10) ein System linear unabhängiger Lösungen der Gleichungen (11) so bestimmen, daß zwei verschiedene Lösungen

$$u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots u_n^{(k)}; \quad u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \ldots, u_n^{(l)}$$

n der Beziehung

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \cdot u_i^{(k)} u_j^{(l)} = 0$$

ueinander stehen. Gehören die beiden Lösungen zu verschiedenen Vurzeln, so genügen sie ohnehin dieser „Orthogonalitätsrelation".

Der Grad der Gleichung (10) beträgt n. Unter den n Wurzeln

$$\varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \cdots \leqq \varrho_n$$

st ϱ_s der kleinste Wert, den die Funktion

$$J(u,u) = \frac{K(u,u)}{H(u,u)}$$

nter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \cdot w_i^{(k)} u_j = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, s-1$$

nnehmen kann. Dabei stellt $w_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eine zu ϱ_k gehörige ichttriviale Lösung von (11) dar und alle derartigen Lösungen $w_i^{(k)}$ ollen paarweise die obige Orthogonalitätsrelation erfüllen.

[7]) R. Courant und D. Hilbert, l. c., S. 32, 33.

Man kann ϱ_s auch als den größten Wert kennzeichnen, den das unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} u_j = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, s-1$$

gebildete Minimum von $J(u,u)$ als Funktion der Parameter α_{kj} annehmen kann.

Sind neben K und H zwei entsprechende Formen K^* und H^* gegeben und ist ferner

$$J(u,u) \leqq J^*(u,u),$$

so folgt daraus $\varrho_i \leqq \varrho_i^*$. Wir werden von dieser Ungleichung unter dem Namen der Majorantenabschätzung Gebrauch machen. Sie läßt sich mit Hilfe der Maximum-Minimum-Eigenschaft der charakteristischen Zahlen ϱ_i ohne weiteres einsehen.

Die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ treten auch bei einer Transformation der beiden quadratischen Formen K und H in Erscheinung. Es existiert eine Substitution

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} v_j . l_{ij},$$

welche die beiden Formen in die einfache Gestalt

$$K(u,u) = \sum_{j=1}^{n} \varrho_j . v_j^2, \quad H(u,u) = \sum_{j=1}^{n} v_j^2$$

überführt.

3. Polygonfunktionen. Taylorformeln.

Wir bezeichnen eine im Grundintervall $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion als n-teilige Polygonfunktion[8]), wenn sie in jedem Abschnitt (Masche) des in n gleiche Teile zerlegten Grundintervalls linear ist. Durch ihre Ordinaten in den Gitterpunkten des Maschensystems ist sie eindeutig bestimmt. Als Beispiel definieren wir eine Polygonfunktion durch den Ansatz

$$F^{(n,k)}(x_i) = F_i^{(n,k)}; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Die Polygonfunktion $F^{(n,k)}(x)$ wird in dieser Arbeit eine erhebliche Rolle spielen.

Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion des Grundintervalls und $f_n(x)$ die mit ihr in den Gitterpunkten eines n-teiligen Maschensystems überein-

[8]) Vgl. R. Courant, Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen. Acta math. **49** (1926), S. 1—68. Der Begriff der Polygonfunktion wird dort im Zusammenhang mit dem Differenzenverfahren benutzt.

immende n-teilige Polygonfunktion. Wir definieren dann

$$f_n'(x) = \frac{\Delta f_i}{h} \quad \text{für} \quad x_i \leqq x < x_{i+1}, \text{ falls } i+1 \neq n, \text{ und}$$

$$f_n'(x) = \frac{\Delta f_{n-1}}{h} \quad \text{für} \quad x_{n-1} \leqq x \leqq x_n$$

s Ableitung der n-teiligen Polygonfunktion f_n. Ist nun $f(x)$ stetig fferenzierbar, so liefert der Mittelwertsatz

$$\frac{\Delta f_i}{h} = f'(\gamma_i); \quad x_i \leqq \gamma_i \leqq x_{i+1}.$$

omit ist

$$|f'(x) - f_n'(x)| = |f'(x) - f'(\gamma_i)|; \quad |x - \gamma_i| \leqq h.$$

ieraus folgt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f'(x)$ der

Hilfssatz 1. Ist die Funktion $f(x)$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

n Sinne gleichmäßiger Konvergenz.

Ist die Funktion $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar, so gelten die ormeln

2) $$\int_x^{x+\alpha} f(t)\,dt = \frac{\alpha}{2}(f(x+\alpha) + f(x)) - \frac{\alpha^3}{12} f''(\beta); \quad x \leqq \beta \leqq x+\alpha;$$

3) $$\int_x^{x+\alpha} f(t)\,dt = \alpha f\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha^3}{24} f''(\beta'); \quad x \leqq \beta' \leqq x+\alpha;$$

on denen die erste als Sehnen-, die zweite als Tangententrapezformel ezeichnet wird. Aus (13) folgt

4') $$\lim_{n\to\infty} h^{-2} \cdot \left\{ \int_a^b f\,dt - \sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} \cdot h \right\} = \frac{f'(b) - f'(a)}{24}.$$

us (12) ergibt sich, falls f den Randbedingungen genügt,

4) $$\lim_{n\to\infty} h^{-2} \cdot \left\{ \int_a^b f\,dt - \sum_{i=1}^{n-1} f_i \cdot h \right\} = \frac{f'(a) - f'(b)}{12}.$$

t $f(t)$ dreimal stetig differenzierbar, so ergibt sich aus (13)

5) $$f(t)\Big|_x^{x+\alpha} = \alpha f'\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha^3 \frac{f'''(\beta'')}{24}; \quad x \leqq \beta'' \leqq x+\alpha;$$

enn $f(t)$ fünfmal stetig differenzierbar ist, kann man durch Taylor-ntwicklungen zur Formel

6) $$f(t)\Big|_x^{x+\alpha} = \alpha f'\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha^3}{24} f'''\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha^5}{5!\,2^4} f^{(V)}(\beta''')$$
$$x \leqq \beta''' \leqq x+\alpha$$

elangen.

§ 2.

Allgemeine Bemerkungen über die Differenzengleichungen.

Unter Benutzung der Abkürzung

$$\tilde{r} = r + h^2 \cdot \tau^{(n)} \tag{17}$$

wollen wir nun die Gleichungen (5) ausführlicher schreiben und zwar

$$\begin{aligned} &F_{i-1}(\tilde{r}_{i-1/2} + h^2 \cdot A^{(n)} \cdot \sigma^{(n)}_{i-1/2}) + F_i(-\tilde{r}_{i+1/2} - \tilde{r}_{i-1/2} + h^2 \cdot \tilde{q}_i + \\ &+ h^2 \cdot A^{(n)} \cdot [p_i - \sigma^{(n)}_{i-1/2} - \sigma^{(n)}_{i+1/2}]) + F_{i+1}(\tilde{r}_{i+1/2} + h^2 \cdot A^{(n)} \cdot \sigma^{(n)}_{i+1/2}) = 0; \\ &i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{18}$$

Tragen wir (5′) hierin ein, so entsteht ein System von Gleichungen für $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ mit einer Koeffizientenmatrix $h^2 \cdot \mathfrak{M}$, wobei

$$\mathfrak{M} = A^{(n)} \cdot \mathfrak{H}^{(n)} - \mathfrak{K}^{(n)}$$

und

$$\mathfrak{K}^{(n)} = \begin{pmatrix} k^{(n)}_{11}, & k^{(n)}_{12}, & \ldots, & k^{(n)}_{1n-1} \\ k^{(n)}_{21}, & k^{(n)}_{22}, & \ldots, & k^{(n)}_{2n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k^{(n)}_{n-1,1}, & k^{(n)}_{n-1,2}, & \ldots, & k^{(n)}_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}^{(n)} = \begin{pmatrix} h^{(n)}_{11}, & h^{(n)}_{12}, & \ldots, & h^{(n)}_{1n-1} \\ h^{(n)}_{21}, & h^{(n)}_{22}, & \ldots, & h^{(n)}_{2n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h^{(n)}_{n-1,1}, & h^{(n)}_{n-1,2}, & \ldots, & h^{(n)}_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$k^{(n)}_{ij} = h^{(n)}_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad |i-j| > 1$$

$$h^2 \cdot k^{(n)}_{ij} = -\tilde{r}_{\frac{i+j}{2}}, \quad h^{(n)}_{ij} = \sigma^{(n)}_{\frac{i+j}{2}} \quad \text{für} \quad |i-j| = 1$$

$$k^{(n)}_{ii} \cdot h^2 = \tilde{r}_{i+1/2} + \tilde{r}_{i-1,2} - h^2 \cdot \tilde{q}_i; \quad h^{(n)}_{ii} = -\sigma^{(n)}_{i-1/2} - \sigma^{(n)}_{i+1/2} + \tilde{p}_i$$

ist. Die Matrizen $\mathfrak{K}^{(n)}$ und $\mathfrak{H}^{(n)}$ sind symmetrisch. Die Gleichung

$$\|\mathfrak{K}^{(n)} - A^{(n)} \cdot \mathfrak{H}^{(n)}\| = 0 \tag{19}$$

hat dann und nur dann den Grad $n-1$, wenn die Determinante $\|\mathfrak{H}^{(n)}\|$ nicht verschwindet. Dafür ist hinreichend, daß die quadratische Form

$$H^{(n)}(u, u) = \sum_{i,j=1}^{n-1} h^{(n)}_{ij} \cdot u_i u_j = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \cdot \Delta(\sigma^{(n)}_{i-1,2} \Delta u_{i-1}); \quad u_0 = u_n = 0$$

definit ist. Beim normalen Verfahren ist sie stets positiv definit. Die Form läßt sich durch partielles Summieren der zweiten Summe rechts in die Gestalt

$$H^{(n)}(u, u) = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i \cdot u_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sigma^{(n)}_{i-1/2} (\Delta u_{i-1})^2; \quad u_0 = u_n = 0$$

überführen. Wir schreiben jetzt weiterhin

$$\overset{+}{\sigma}{}^{(n)} = \frac{1 + \operatorname{sgn} \sigma^{(n)}}{2} \cdot \sigma^{(n)}, \quad \overset{-}{\sigma}{}^{(n)} = \frac{1 - \operatorname{sgn} \sigma^{(n)}}{2} \cdot \sigma^{(n)}; \quad \sigma^{(n)} = \overset{+}{\sigma}{}^{(n)} + \overset{-}{\sigma}{}^{(n)}$$

und finden danach die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i \cdot u_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \overset{-}{\sigma}{}^{(n)}_{i-1,2} (\Delta u_{i-1})^2 \geqq H^{(n)}(u, u) \geqq \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i \cdot u_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \overset{+}{\sigma}{}^{(n)}_{i-1/2} (\Delta u_{i-1})^2$$

Wegen

$$(\Delta u_{i-1})^2 \leqq 2\,u_{i-1}^2 + 2\,u_i^2$$

kann man hieraus die weiteren Ungleichungen

$$(20)\quad \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{p}_i - 2\,\underline{\sigma}_{i-1}^{(n)} - 2\,\underline{\sigma}_{i+1/2}^{(n)})\,u_i^2 \geqq H^{(n)}(u,u) \geqq \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{p}_i - 2\,\underline{\sigma}_{i-1}^{(n)} - 2\,\underline{\sigma}_{i+1/2}^{(n)})\,u_i^2$$

ableiten. Nun ist wegen (5″) und (5‴)

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{p} = p; \quad \lim_{n\to\infty} \sigma^{(n)} = \sigma$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Daraus ergibt sich die Existenz einer von n unabhängigen positiven Konstanten C_4, welche die Abschätzung

$$(21)\quad C_4 \leqq \tilde{p}_i - 2\,\underline{\sigma}_{i-1/2}^{(n)} - 2\,\underline{\sigma}_{i+1/2}^{(n)}$$

ermöglicht. Ist ferner

$$(22)\quad p - 4\,\sigma \geqq 2\,C_5 > 0,$$

so ist für fast alle n

$$(23)\quad \tilde{p}_i - 2\,\underline{\sigma}_{i-1/2}^{(n)} - 2\,\underline{\sigma}_{i+1/2}^{(n)} > C_5.$$

Fassen wir (20), (21), (23) zusammen, so finden wir

$$(24)\quad C_4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 \leqq H^{(n)}(u,u) \geqq C_5 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2.$$

Die Form $H^{(n)}(u,u)$ ist also für fast alle n positiv definit, so daß für hinreichend großes n oder hinreichend kleine Schrittweite h genau $n-1$ Differenzeneigenwerte existieren, die nach § 1/2 sämtlich reell sind, wenn $H^{(n)}(u,u)$ definit ist. Der Voraussetzung (22), die dies erzwingt, kann man auch die Form

$$(22')\quad p - 4\,\sigma > 0$$

geben. Sie soll für alles folgende erfüllt sein. Auf das normale Verfahren trifft sie stets zu. Es mag sein, daß wir mit (22′) eine stärkere Bedingung einführen, als sie zur Abschätzung (24) notwendig ist. Immerhin läßt sich zeigen, daß es unter den Formen $H^{(n)}(u,u)$ beliebig viele indefinite gibt, wenn auch nur für eine Stelle x die Ungleichung

$$p - 4\,\sigma < 0$$

zutrifft. Auf den Beweis dafür gehe ich nicht ein.

Es existiert eine Zahl $N > 0$ von der Beschaffenheit, daß die Formen $H^{(n)}(u,u)$ für $n \geqq N$ dem rechten Teil der Abschätzung (24) unterliegen und somit positiv definit sind. Das schließt nicht aus, daß es auch für $n < N$ positiv definite Formen gibt. Die Zahl N wird im folgenden eine wesentliche Rolle spielen.

§ 3.

Extremalsätze über die Differenzeneigenwerte.

Wir beziehen jetzt noch die Form

$$K^{(n)}(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n-1} k_{ij}^{(n)} u_i u_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2}\left(\frac{\Delta u_{i-1}}{h}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i u_i^2; \quad u_0 = u_n = 0$$

in unsere Betrachtungen ein. Unsere Differenzengleichungen können wir auch in der Form

$$\sum_{i=1}^{n-1} (k_{ij}^{(n)} - \Lambda^{(n)} \cdot h_{ij}^{(n)}) F_i = 0; \quad j = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

schreiben und jetzt lehrt ein Vergleich mit Formel (11) des § 1, daß die Differenzeneigenwerte nichts anderes sind als die zu den Formen $K^{(n)}(u,u)$ und $H^{(n)}(u,u)$ gehörigen Extremwerte. Wir können daher alle in § 1/2 zusammengestellten Ergebnisse übernehmen, wenn wir dort K durch $K^{(n)}$, H durch $H^{(n)}$ und ϱ durch $\Lambda^{(n)}$ ersetzen. Die in § 1 vorausgesetzte Eigenschaft von H, positiv definit zu sein, wird bei fast allen Formen $H^{(n)}(u,u)$ durch (22′) erzwungen. Von nun ab betrachten wir in diesem und allen folgenden Paragraphen nur noch Differenzengleichungen, denen eine positiv definite Form $H^{(n)}(u,u)$ zugrunde liegt.

Durch den Vergleich mit § 1/2 ergeben sich folgende Sätze:

Satz 1. Es existieren $(n-1)$ Differenzeneigenwerte

$$\Lambda_1^{(n)} \leqq \Lambda_2^{(n)} \leqq \ldots \leqq \Lambda_{n-1}^{(n)}$$

zur Schrittweite h. Es lassen sich korrespondierende Differenzeneigenlösungen

$$F_0^{(n,k)}, F_1^{(n,k)}, \ldots, F_n^{(n,k)} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

so bestimmen, daß sie paarweise die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_{n,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} \cdot F_i^{(n,k)} \cdot F_j^{(n,m)} = 0 \quad \text{für} \quad k \neq m$$

erfüllen.

Für alles folgende denken wir uns die Differenzeneigenlösungen so beschaffen, daß sie dem Satz 1 genügen.

Satz 2. Der Differenzeneigenwert $\Lambda_k^{(n)}$ ist der kleinste Wert, den der Quotient

$$J^{(n)}(u,u) = \frac{K^{(n)}(u,u)}{H^{(n)}(u,u)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$H^{(n)}(u, F^{(n,s)}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} u_i F_j^{(n,s)} = 0; \quad s = 1, 2, \ldots, k-1$$

annimmt. Er wird für $u_i = F_i^{(n,k)}$ erreicht.

Satz 3. $A_k^{(n)}$ ist der größte Wert, den das unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ji} u_i = 0; \quad j = 1, 2, \ldots, k \quad 1$$

gebildete Minimum von $J^{(n)}$ als Funktion der Parameter α_{ji} annimmt.

§ 4.

Ein Beispiel zum normalen Verfahren.

Wir setzen $r \equiv p \equiv 1$; $q \equiv 0$; $b - a = L$. Dann nimmt (1) die Form

$$y'' + \lambda . y = 0$$

an. Die k-te Eigenfunktion hat die (unnormierte) Form

$$y_k = \sin \frac{(x-a) k \pi}{L}.$$

und der zugehörige Eigenwert λ_k beträgt

$$\lambda_k = k^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2.$$

Die Differenzengleichungen (4) schreiben sich

$$\Delta \Delta F_{i-1} + h^2 . A^{(n)} F_i = 0.$$

Es läßt sich ohne weiteres

$$F_i^{(n,k)} = y_k(x_i),$$

(26) $$A_k^{(n)} = 2 h^{-2} \left(1 - \cos \frac{\pi k h}{L}\right) = k^2 \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi k h}{2L}}{\frac{\pi k h}{2L}} \right)^2$$

bestätigen. Wir können auch

$$A_k^{(n)} = \lambda_k \cdot \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\right)^2, \quad \vartheta = \frac{\pi . k h}{2L}$$

setzen. Für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ist stets $0 < \vartheta < \pi/2$. Mithin ist

$$\frac{4}{\pi^2} < \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\right)^2 < 1.$$

Daraus folgt die Abschätzung

(27) $$\frac{4}{L^2} k^2 \leqq A_k^{(n)} \leqq \frac{\pi^2}{L^2} k^2.$$

Es ist ferner

$$J^{(n)}(u, u) = J_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta u_{i-1})^2}{h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2}.$$

Die Zahlen (26) sind also zugleich die Extremalwerte der speziellen Funktion $J_0(u, u)$.

§ 5.

Abschätzungen der Differenzeneigenwerte.

Wir schreiben

$$J^{(n)}(u,u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2}\left(\frac{\Delta u_{i-1}}{h}\right)^2}{H^{(n)}(u,u)} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i u_i^2}{H^{(n)}(u,u)}.$$

Nun ist wegen (5″)

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{r} = r; \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{q} = q$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Es gibt also eine Zahl $N_1 \geqq N$, so daß

$$\frac{C_1}{2} \leqq \tilde{r} \leqq 2\,C_2; \quad |\tilde{q}| \leqq 2\,C_2; \quad \text{für } n \geqq N_1 \tag{28}$$

gesetzt werden kann. Mit Hilfe von (24) und (28) können wir $J^{(n)}(u,u)$ in der Form

$$\frac{2\,C_2}{C_5} + \frac{C_1}{2\,C_4} J_0 \leqq J^{(n)}(u,u) \leqq \frac{2\,C_2}{C_5} + \frac{2\,C_2\,\pi^2}{C_5} \cdot J_0$$

abschätzen. Dabei ist J_0 die in § 4 eingeführte Funktion. Unter Benutzung von (27) und unter Anwendung der Majorantenabschätzung des § 1/2 ergibt sich

$$-\frac{2\,C_2}{C_5} + \frac{4\,C_1}{2\,C_4 L^2} k^2 \leqq \Lambda_k^{(n)} \leqq \frac{2\,C_2}{C_5} + \frac{2\,C_2}{C_5 L^2} \pi^2 k^2, \quad n \geqq N_1.$$

Hierfür können wir auch schreiben

$$-C_8 + C_7 k^2 \leqq \Lambda_k^{(n)} \leqq C_6 k^2 \tag{29}$$
$$n \geqq N_1$$

mit lauter positiven, von n und k unabhängigen Konstanten C_6, C_7, C_8. Die Abschätzung (29) gilt indes ohne die Einschränkung, welcher die Zahl n in (28) unterworfen ist. Es kann nämlich höchstens endlich viele Differenzeneigenwerte $\Lambda_k^{(n)}$ für $n < N_1$ geben. Diese können am Charakter der Abschätzung (29) nichts ändern, wenn sie — gegebenenfalls unter Abänderung der Konstanten — darin einbezogen werden. Nur eine andere Fassung der Abschätzung ist der

Hilfssatz 2. Die Differenzeneigenwerte $\Lambda_k^{(n)}$ unterliegen den Abschätzungen

$$\Lambda_k^{(n)} \leqq C_6 k^2; \quad C_9 k^2 \leqq \Lambda_k^{(n)} \quad \text{für} \quad k \geqq k_0,$$

worin C_6, C_9 und k_0 lauter positive, von n und k unabhängige Konstanten bedeuten.

§ 6.

Abschätzungen der Polygonfunktionen der Differenzeneigenlösungen.

Es sei $n \geqq N_1$. Die Differenzeneigenlösungen sind bis auf einen konstanten Faktor unbestimmt. Wir normieren sie nunmehr durch die Bedingung

(30) $$h \,.\, H^{(n)}(F^{(n,k)}, F^{(n,k)}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} F_i^{(n,k)} \,.\, F_j^{(n,k)} h = 1.$$

Das bedeutet nach S. 432, Zeile 5 von unten

(30′) $$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i F_i^{(n,k)2} \,.\, h - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1/2}^{(n)} (\Delta F_{i-1}^{(n,k)})^2 h = 1.$$

Sie sind dann immer noch bis auf den Faktor ± 1 unbestimmt. Auch diesen Mangel werden wir später beseitigen. Aus (30) folgt

(30″) $$\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h} \right)^2 h - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i \,.\, F_i^{(n,k)2} \,.\, h = A_k^{(n)}$$

und hieraus ergibt sich wegen (28)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h} \right)^2 h \leqq \frac{2}{C_1} A_k^{(n)} + \frac{4 C_2}{C_1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(n,k)2} \,.\, h.$$

Ferner folgt aus (30) und (24)

(31) $$\sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(n,k)2} \,.\, h \leqq \frac{1}{C_5}.$$

Auf Grund des Hilfssatzes 2 und (31) dürfen wir jetzt schreiben

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h} \right)^2 h \leqq \frac{2}{C_1} \cdot \left(C_6 k^2 + \frac{2 C_2}{C_5} \right)$$

oder auch

(32) $$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h} \right)^2 h \leqq C_{10} \,.\, k^2$$

mit einer von n und k unabhängigen Konstanten C_{10}. Mit Bezug auf die in § 1 3 definierte Ableitung einer Polygonfunktion schreiben wir ferner

$$F^{(n,k)}(x'') - F^{(n,k)}(x') = \int_{x'}^{x''} F^{(n,k)\prime} \,.\, dx, \quad x' < x'',$$

und wenden darauf die Schwarzsche Ungleichung an. Wir erhalten

$$|F^{(n,k)}(x'') - F^{(n,k)}(x')|^2 \leqq (x'' - x') \,.\, \int_{x'}^{x''} F^{(n,k)\prime 2} \,.\, dx \leqq (x'' - x') \,.\, \int_{a}^{b} F^{(n,k)\prime 2} \,.\, dx$$

(33) $$= (x'' - x') \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h} \right)^2 \cdot h \leqq (x'' - x') \cdot C_{10} k^2.$$

Hieraus geht hervor, daß alle Polygonfunktionen $F_{(x)}^{(n,k)}$ bei festem k gleichgradig stetig sind. Ferner folgt aus (33), wenn wir $x' = a$ setzen, daß die Polygonfunktionen $F_{(x)}^{(n,k)}$ bei festem k auch gleichmäßig beschränkt sind. Da man aus einer Folge gleichgradig stetiger und dem Betrage nach gleichmäßig beschränkter Funktionen eine gleichmäßig konvergente Teilfolge aussondern kann, gilt der

Hilfssatz 3. Aus der Folge $F^{(n,k)}$ kann man bei festem k eine gleichmäßig konvergente Teilfolge aussondern.

Der vorstehende Beweis für die gleichgradige Stetigkeit der Polygonfunktionen $F^{(n,k)}$ geht im wesentlichen auf R. Courant [8]) zurück.

Wir wenden jetzt die Schwarzsche Ungleichung auf die Relation

$$F_i^{(n,k)2} = \sum_{\nu=0}^{i-1} \Delta F_\nu^{(n,k)} \cdot h^{-1} \cdot (F_\nu^{(n,k)} + F_{\nu+1}^{(n,k)}) h; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

an und erhalten

$$F_i^{(n,k)4} \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} h \cdot \left(\frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} (F_\nu^{(n,k)} + F_{\nu+1}^{(n,k)})^2 h$$

$$\leqq 4 \sum_{\nu=1}^{n} h \left(\frac{\Delta F_{\nu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} F_\nu^{(n,k)2} \cdot h,$$

woraus unter Berücksichtigung von (31) und (32)

$$F^{(n,k)4}(x) \leqq 4 \frac{C_{10}}{C_5} k^2 \quad \text{oder} \quad |F^{(n,k)}| \leqq C_{11} k^{1/2}$$

mit einer von n, k und x unabhängigen Konstanten C_{11} folgt.

Hilfssatz 4. Es besteht die Abschätzung $|F^{(n,k)}| \leqq C_{11} \cdot \sqrt{k}$ mit einer von n, k und x unabhängigen Konstanten C_{11}.

Für spätere Anwendungen benötigen wir den folgenden Hilfssatz, der sich ergibt, wenn man die darin vorkommenden Summen mittels der Schwarzschen Ungleichung und der Ungleichungen (31), (32) abschätzt.

Hilfssatz 5. Liegen die Zahlen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ dem Betrage nach unterhalb einer positiven Zahl Φ, so bestehen die Abschätzungen

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(n,k)} \cdot \Phi_i \cdot h\right| \leqq C_{12} \cdot \Phi; \quad \left|\sum_{i=0}^{n-1} \Delta F_i^{(n,k)} \cdot \Phi_i\right| \leqq C_{13} \cdot k \Phi$$

mit von n und k unabhängigen Konstanten C_{12} und C_{13}.

Wir knüpfen jetzt an unsere Differenzengleichung (5) an, die nach (5″) und (17) in der Gestalt

$$\Delta\left(\tilde{r}_{i-1/2} \frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h^2}\right) + (A_k^{(n)} \cdot \tilde{p}_i + \tilde{q}_i) F_i^{(n,k)} + A_k^{(n)} \Delta(\sigma_{i-1/2}^{(n)} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,k)}) = 0$$

geschrieben werden kann. Diese Gleichung multiplizieren wir mit dem Faktor

$$\tilde{r}_{i+1/2} \Delta F_i^{(n,k)} + \tilde{r}_{i-1/2} \Delta F_{i-1}^{(n,k)}$$

und summieren danach über $i = \mu, \mu+1, \ldots, \nu$. Wir erhalten

$$\left(\tilde{r}_{\nu+1/2} \cdot \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 - \left(\tilde{r}_{\mu-1/2} \cdot \frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2$$

$$= -\sum_{i=\mu}^{\nu} (A_k^{(n)} \cdot \tilde{p}_i + \tilde{q}_i) F_i^{(n,k)} \cdot (\tilde{r}_{i+1/2} \Delta F_i^{(n,k)} + \tilde{r}_{i-1/2} \Delta F_{i-1}^{(n,k)})$$

$$A_k^{(n)} \sum_{i=\mu}^{\nu} \Delta(\sigma_{i-1/2}^{(n)} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,k)}) (\tilde{r}_{i+1/2} \Delta F_i^{(n,k)} + \tilde{r}_{i-1/2} \Delta F_{i-1}^{(n,k)}).$$

Hierfür können wir auch schreiben

$$\left(\tilde{r}_{\nu+1/2}\cdot\frac{\Delta F_{\nu}^{(n,k)}}{h}\right)^2-\left(\tilde{r}_{\mu-1/2}\cdot\frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2$$

$$=-\sum_{i=\mu}^{\nu}\left(\Delta_k^{(n)}\tilde{p}_i+\tilde{q}_i\right)\tilde{r}_i F_i^{(n,k)}\left(F_{i+1}^{(n,k)}-F_{i-1}^{(n,k)}\right)+R_1,$$

$$R_1=-\sum_{i=\mu}^{\nu}\Delta_k^{(n)}\cdot\Delta\left(\sigma_{i-1/2}^{(n)}\Delta F_{i-1}^{(n,k)}\right)\left(\tilde{r}_{i+1/2}\cdot\Delta F_i^{(n,k)}+\tilde{r}_{i-1/2}\cdot\Delta F_{i-1}^{(n,k)}\right)$$

$$-\sum_{i=\mu}^{\nu}\left(\Delta_k^{(n)}\tilde{p}_i+\tilde{q}_i\right)F_i^{(n,k)}\cdot\left\{\left(\tilde{r}_{i+1/2}-\tilde{r}_i\right)\cdot\Delta F_i^{(n,k)}+\left(\tilde{r}_{i-1/2}-\tilde{r}_i\right)\Delta F_{i-1}^{(n,k)}\right\}.$$

Eine weitere Umformung durch partielles Summieren liefert

$$\left(\tilde{r}_{\nu+1/2}\cdot\frac{\Delta F_{\nu}^{(n,k)}}{h}\right)^2-\left(\tilde{r}_{\mu-1/2}\cdot\frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2$$

(34)

$$=-\left(\Delta_k^{(n)}\cdot\tilde{p}_{\nu}+\tilde{q}_{\nu}\right)\tilde{r}_{\nu}F_{\nu}^{(n,k)}F_{\nu+1}^{(n,k)}+\left(\Delta_k^{(n)}\tilde{p}_{\mu}+\tilde{q}_{\mu}\right)\tilde{r}_{\mu}\cdot F_{\mu}^{(n,k)}F_{\mu-1}^{(n,k)}+R_2,$$

$R_2=R_1+\sum_{i=\mu}^{\nu-1}F_i^{(n,k)}\cdot F_{i+1}^{(n,k)}\cdot\Delta\left[\left(\Delta_k^{(n)}\tilde{p}_i+\tilde{q}_i\right)\tilde{r}_i\right]$ für $\nu>\mu$ und $R_2=R_1$ für $\nu=\mu$.

Nun existiert gewiß eine von n und k unabhängige positive Konstante C_{14}, so daß auf Grund der Voraussetzungen über $r, p, q, \tilde{r}, \tilde{p}, \tilde{q}$ und wegen des Hilfssatzes 2

$$\left|\Delta_k^{(n)}\sigma^{(n)}\right|_{\max}\cdot|\tilde{r}|\leqq C_{14}\cdot k^2$$

$$\left|\tilde{r}_{i\pm1/2}-\tilde{r}_i\right|\cdot\left|\Delta_k^{(n)}\cdot\tilde{p}+\tilde{q}\right|_{\max}\leqq C_{14}\cdot k^2\cdot h$$

$$\left|\Delta\left(\left[\Delta_k^{(n)}\cdot\tilde{p}_i+\tilde{q}_i\right]\tilde{r}_i\right)\right|\leqq C_{14}\cdot k^2\cdot h$$

geschrieben werden darf. Demnach gilt

$$|R_2|\leqq C_{14}k^2\cdot\sum_{i=\mu}^{\nu}\left\{\left(\left|\Delta F_i^{(n,k)}\right|+\left|\Delta F_{i-1}^{(n,k)}\right|\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left|F_i^{(n,k)}\right|\cdot\left(\left|\Delta F_i^{(n,k)}\right|+\left|\Delta F_{i-1}^{(n,k)}\right|\right)\cdot h+\left|F_i^{(n,k)}\cdot F_{i+1}^{(n,k)}\right|\cdot h\right\}.$$

Indem wir die rechte Seite unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichung abschätzen, erhalten wir

$$|R_2|\leqq C_{14}\cdot k^2\left\{\sum_{i=1}^{n}4\left(\Delta F_{i-1}^{(n,k)}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2h\left(\sum_{i=1}^{n-1}F_i^{(n,k)}\cdot h\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2h\right]^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n-1}F_i^{(n,k)2}\cdot h\right\}.$$

Nehmen wir jetzt (31) und (32) zu Hilfe, so können wir die rechte Seite und damit $|R_2|$ wie folgt abschätzen:

$$|R_2|\leqq C_{14}\cdot k^2\cdot\left\{4C_{10}\cdot k^2\cdot h+2\left(\frac{C_{10}}{C_5}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot k\,h+\frac{1}{C_5}\right\}.$$

Wegen $kh \leqq b - a$ ist demnach

$$|R_2| \leqq C_{15} \cdot k^3,$$

wobei $C_{15} > 0$ von n und k nicht abhängt. Für mindestens einen der in (32) unter dem Summenzeichen stehenden Differenzenquotienten muß eine Abschätzung von der Form

$$\left| \frac{\Delta F_{j-1}^{(n,k)}}{h} \right| \leqq C_{16} k$$

bestehen, wobei C_{16} von n und k nicht abhängt. Der Index j sei dadurch gekennzeichnet. Indem wir in (34) ein erstes Mal $\mu = j$, ein zweites Mal $\nu = j - 1$ setzen und den Hilfssatz 4 benutzen, erhalten wir zwei Abschätzungen von der Form

$$\left(\tilde{r}_{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq C_{17} k^3 \text{ für } \nu \geqq j, \qquad \left(\tilde{r}_{\mu-\frac{1}{2}} \frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq C_{17} k^3 \text{ für } \mu \leqq j,$$

wobei $C_{17} > 0$ von n und k nicht abhängt. Nun ist nach (28)

$$2\tilde{r} \geqq C_1.$$

Demnach haben wir

$$\left(\frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq 4 \cdot \frac{C_{17}}{C_1^2} k^3 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, (n-1),$$

und daraus folgt der

Hilfssatz 6. Es existiert eine von n und k unabhängige Konstante $C_{18} > 0$, welche die Abschätzung

$$\left| \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h} \right| \leqq C_{18} \cdot k^{3/2} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1$$

ermöglicht.

Die Aussage dieses Hilfssatzes läßt sich für $\nu = 0$ und $\nu = n - 1$ noch verschärfen. Wir betrachten, indem wir $A^{(n)} = A_k^{(n)}$ setzen, die Funktion

$$\bar{r} = r + h^2 \cdot (A_k^{(n)} \cdot \sigma^{(n)} + \tau^{(n)}).$$

Der Ausdruck $|h^2 \cdot A_k^{(n)}|$ liegt unterhalb einer von n und k nicht abhängigen Schranke. Das gleiche gilt für die von n und k abhängige Funktion $|\bar{r}(x)|$, da insbesondere die Funktionen $\sigma^{(n)}$ und $\tau^{(n)}$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen σ und τ konvergieren. Wir formulieren jetzt noch zwei Voraussetzungen über die Funktionen $\sigma_{(x)}^{(n)}$.

α) Die Funktionen $\sigma^{(n)}(s)$ besitzen Differenzenquotienten, die dem Betrage nach gleichmäßig in n und in den Argumenten beschränkt sind.

β) Es gibt eine von n unabhängige Zahl $\varkappa > 0$, so daß im Falle $\sigma(a) \neq 0$ weder $-\frac{r(a)}{\sigma(a)}$, noch $-\frac{r(b)}{\sigma(b)}$ im Falle $\sigma(b) \neq 0$ ein Häufungswert der Zahlen $h^2 \cdot A_k^{(n)}$ für $k \geqq \varkappa$ ist.

Die Bedingung α) hat zur Folge, daß auch $\bar{r}$ dem Betrage nach gleichmäßig in n, k und in den Argumenten beschränkte Differenzenquotienten besitzt. Aus der Eigenschaft β) folgt die Existenz einer

von n und k unabhängigen Zahl $C_{19} > 0$ sowie einer gleichfalls von n und k unabhängigen Zahl $N_2 \geqq N_1$, so daß

$$|r(a) + h^2 \cdot \Lambda_k^{(n)} \cdot \sigma(a)| \geqq 2\,C_{19}; \quad |r(b) + h^2 \cdot \Lambda_k^{(n)} \cdot \sigma(b)| \geqq 2\,C_{19}$$

für $n \geqq N_2$ gilt. Daraus ergibt sich die Existenz einer weiteren von n und k unabhängigen Zahl $N_3 \geqq N_2$, so daß

(35) $$|\bar{r}_{1/2}| \geqq C_{19}; \qquad |\bar{r}_{n-1/2}| \geqq C_{19} \quad \text{für} \quad n \geqq N_3$$

geschrieben werden darf. Für $n \geqq N_3$ entwickeln wir jetzt eine zu (34) analoge Formel, indem wir von den Gleichungen (5)

$$\Delta(\bar{r}_{i-1/2}\,\Delta F_{i-1}^{(n,k)}) + h^2 \cdot (\Lambda_k^{(n)} \tilde{p}_i + \tilde{q}_i)\, F_i^{(n,k)} = 0$$

ausgehen. Wir können die Zwischenstufen überspringen und sogleich schreiben

$$\left(\bar{r}_{\nu+1/2}\,\frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 - \left(\bar{r}_{\mu-1/2} \cdot \frac{\Delta F_{\mu-1}^{(n,k)}}{h}\right)^2$$

$$= -\bar{r}_\nu (\Lambda_k^{(n)} \tilde{p}_\nu + \tilde{q}_\nu) \cdot F_{\nu+1}^{(n,k)} \cdot F_\nu^{(n,k)} + \bar{r}_\mu (\Lambda_k^{(n)} \tilde{p}_\mu + \tilde{q}_\mu) F_{\mu-1}^{(n,k)} F_\mu^{(n,k)} + R_3,$$

$$R_3 = -\sum_{i=\mu}^{\nu} (\Lambda_k^{(n)} \tilde{p}_i + \tilde{q}_i)\, F_i^{(n,k)} \cdot \{(\bar{r}_{i+1/2} - \bar{r}_i) \cdot \Delta F_i^{(n,k)} + (\bar{r}_{i-1/2} - \bar{r}_i) \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,k)}\} +$$

(36) $$+ \sum_{i=\mu}^{\nu-1} F_i^{(n,k)} \cdot F_{i+1}^{(n,k)} \cdot \Delta[(\Lambda_k^{(n)} \tilde{p}_i + \tilde{q}_i) \cdot \bar{r}_i]\, \delta_{\mu\nu};$$

$$\delta_{\mu\nu} = 1 \quad \text{für} \quad \nu > \mu; \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = \mu.$$

Für $|R_3|$ kann man die Abschätzung

$$|R_3| \leqq C_{20} \cdot k^2$$

finden. Die Konstante $C_{20} > 0$ hängt von μ, ν, n und k nicht ab. Indem wir die Abkürzung

$$X_\nu = \left(\bar{r}_{\nu+1/2} \cdot \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h}\right)^2 + \bar{r}_\nu \cdot (\Lambda_k^{(n)} \cdot \tilde{p}_\nu + \tilde{q}_\nu) \cdot F_\nu^{(n,k)} \cdot F_{\nu+1}^{(n,k)}$$

benutzen, können wir aus (36) und der Abschätzung von R_3 die Relation

(37) $$X_\nu = X_0 + \vartheta_\nu \cdot C_{20} k^2, \quad |\vartheta_\nu| \leqq 1$$

ableiten. Die Größe X_0 besitzt höchstens die Größenordnung von k^2. Man erkennt dies, indem man (37) über alle Indizes $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ summiert und danach die Relationen (31), (32) und die Schwarzsche Ungleichung anwendet. Somit dürfen wir

$$X_0 = \left(\bar{r}_{1/2} \cdot \frac{\Delta F_0^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq C_{21} k^2$$

oder unter Benutzung von (35)

$$\left(\frac{\Delta F_0^{(n,k)}}{h}\right)^2 \leqq \frac{C_{21} k^2}{C_{19}^2} \quad \text{für} \quad n \geqq N_3$$

schreiben. Dabei ist C_{21} eine von n und k nicht abhängige Konstante. Entsprechendes läßt sich für $\nu = n-1$ ableiten. Somit gilt der

Hilfssatz 7. Unter den Voraussetzungen α) und β) ist für $\nu = 0$, $\nu = n-1$

$$\left| \frac{\Delta F_\nu^{(n,k)}}{h} \right| \leqq C_{22} k \quad \text{für} \quad n \geqq N_3,$$

wobei die Konstante C_{22} von n und k nicht abhängt.

Die Voraussetzung β) und damit eine der Voraussetzungen dieses Hilfssatzes ist immer dann erfüllt, wenn $\sigma(x)$ wesentlich positiv ist. Wegen des Hilfssatzes 2 können sich nämlich die Zahlen $h^2 . \Lambda_k^{(n)}$ für hinreichend große Werte von k nur gegen positive Zahlen häufen.

Sämtliche Hilfssätze dieses Paragraphen sind unter gewissen Einschränkungen für n bewiesen worden. Ihrem Wesen nach gelten sie aber ohne jede solche Einschränkung, wenn nur die zugehörige Form $H^{(n)}(u,u)$ positiv definit ist (nur für soche n haben wir die Polygonfunktionen $F^{(n,k)}$ erklärt). Es existieren nämlich höchstens endlich viele Zahlen $F_i^{(n,k)}$ für $n < N_3$, und diese können, gegebenenfalls unter Abänderung der Konstanten, in alle Hilfssätze einbezogen werden. Für die Anwendungen der Hilfssätze benutzen wir

$$C = \operatorname{Max}(C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{18}, C_{22})$$

statt einer der rechts stehenden Konstanten.

§ 7.

Entwicklung von Polygonfunktionen nach den Polygonfunktionen der Differenzeneigenlösungen.

Das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)} . F_i^{(n,k)} = z_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

besitzt genau eine Lösung für die Unbekannten $d_k^{(n)}$, da wegen (30) die Determinantengleichung

$$\| h . F_i^{(n,k)} \| . \| \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} F_j^{(n,k)} \| = 1$$

besteht, aus welcher

$$\| F_i^{(n,k)} \| \neq 0$$

folgt. Die Lösung hat die Form

$$(38') \qquad d_k^{(n)} = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} z_i . F_j^{(n,k)} . h = h . H^{(n)}(z, F^{(n,k)}).$$

Gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem ist die Schreibweise

$$(38) \qquad z(x) = \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)} . F^{(n,k)}(x),$$

worin $z(x)$ eine n-teilige, den Randbedingungen $z(a) = z(b) = 0$ genügende Polygonfunktion ist. Es stellt (38) eine Entwicklung dieser Polygonfunktion nach den Polygonfunktionen der Differenzeneigenlösungen mit den in (38′) angegebenen Koeffizienten dar.

Die Formel (38′) läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (vgl. § 3)

$$\sum_{i=1}^{n-1} (k_{ij}^{(n)} - \Lambda_k^{(n)} h_{ij}^{(n)}) \cdot F_i^{(n,k)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

auf eine neue Gestalt bringen. Wir multiplizieren die Gleichung des Index j mit z_j und summieren danach alle Gleichungen. Man erhält

$$\text{(39)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n-1} k_{ij}^{(n)} F_i^{(n,k)} \cdot z_j = \Lambda_k^{(n)} \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(n)} F_i^{(n,k)} z_j = d_k^{(n)} \cdot \Lambda_k^{(n)} \frac{1}{h}$$

oder (vgl. auch (30″))

$$\text{(39′)} \qquad d_k^{(n)} \cdot \Lambda_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2} \frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h} \cdot \frac{\Delta z_{i-1}}{h} \cdot h - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i F_i^{(n,k)} \cdot z_i \cdot h; \quad z_0 = z_n = 0$$

oder schließlich

$$\text{(39″)} \qquad \begin{aligned} d_k^{(n)} \cdot \Lambda_k^{(n)} = & \sum_{i=2}^{n-1} \tilde{r}_{i-1/2} \frac{\Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h} \cdot \frac{\Delta z_{i-1}}{h} h - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i F_i^{(n,k)} \cdot z_i h + \\ & + z_1 \tilde{r}_{1/2} \frac{\Delta F_0^{(n,k)}}{h} - z_{n-1} \tilde{r}_{n-1/2} \frac{\Delta F_{n-1}^{(n,k)}}{h}. \end{aligned}$$

Es sei nun

$$|z(x)| \leqq Z; \quad |\Delta z_i| \leqq Z h, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Sind nun die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 erfüllt, so folgt aus den Hilfssätzen 2, 5, 7 eine Abschätzung von der Form

$$\text{(40)} \qquad |d_k^{(n)}| \leqq \frac{Z C_{23}}{k} \quad \text{für} \quad k \geqq k_0,$$

worin die Konstante C_{23} von n und k nicht abhängt. Ohne die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 gilt (40), wenn

$$|z(x)| \leqq Z; \qquad \left| \frac{\Delta z_{i-1}}{h} \right| \leqq Z \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n$$

geschrieben werden darf, wenn also alle Differenzenquotienten von z in die Abschätzung einbezogen sind.

Aus dem Satz 1 und (38) ergibt sich die Formel

$$\text{(41)} \qquad h \cdot H^{(n)}(z, z) = \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)2}.$$

Wir machen jetzt von den Formeln (40) und (41) eine wichtige Anwendung. Wir setzen $z_i = y_{\mu i}$, wobei y_μ die μ-Eigenfunktion des Eigenwertproblems ist. Es ist gemäß (7), (7′) des § 1/1

$$|y_\mu| \leqq Y \leqq \mu Y; \quad |\Delta y_{\mu i-1}| \leqq h \mu Y; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Also dürfen wir (40) in der Form

$$|d_k^{(n)}| \leqq \frac{\mu Y C_{23}}{k} \quad \text{für} \quad k \geqq k_0 \tag{40'}$$

anwenden. Aus (41) folgt (vgl. S. 11)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{p}_i y_{\mu i}^2 h - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1/2}^{(n)} (\Delta y_{\mu i-1})^2 h = \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)2}.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen $\tilde{p}$ und $\sigma^{(n)}$ mit wachsendem n folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n)2} = \int_a^b p\, y_\mu^2\, dx = 1. \tag{42}$$

Aus (40′) folgt die Existenz einer von n unabhängigen Zahl $\nu \geqq k_0$, so daß

$$\sum_{k=\nu}^{n-1} d_k^{(n)2} < 1/4 \quad \text{für} \quad n > \nu$$

und somit wegen (42)

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\nu} d_k^{(n)2} \geqq 1/4$$

geschrieben werden darf. Ist nun $n_1, n_2, \ldots, n_j \ldots$ eine vorgegebene Teilfolge der natürlichen Zahlen, so existiert ein Index $\mu' \leqq \nu$, so daß

$$\limsup_{n_j\to\infty} |d_{\mu'}^{(n_j)}| \neq 0$$

ist. Zur schärferen Kennzeichnung der Entwicklungskoeffizienten der n-teiligen Polygonfunktion $y_\mu^{(n)}(x)$ setzen wir $d_k^{(n)} = d_{\mu k}^{(n)}$. Die Entwicklung (38) lautet dann

$$y_\mu^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} d_{\mu k}^{(n)} F^{(n,k)}(x). \tag{38'}$$

Unser letztes Ergebnis erhält die Form von

Hilfssatz 8. Zu jeder natürlichen Zahl μ und jeder vorgegebenen Teilfolge $n_1, n_2, \ldots$ der natürlichen Zahlen läßt sich mindestens eine natürliche Zahl μ' finden, so daß

$$\limsup_{j\to\infty} |d_{\mu\mu'}^{(n_j)}| \neq 0$$

ist.

§ 8.

Der Hauptkonvergenzsatz.

Für die Eigenfunktion y_μ gilt

$$(r y_\mu')_i' + (\lambda_\mu p_i + q_i) y_{\mu i} = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Daraus gewinnen wir

$$\lambda_\mu \{\tilde{p}_i y_{\mu i} + \Delta(\sigma^{(n)}_{i-1/2} \Delta y_{\mu i-1})\} = h^2(\lambda_\mu \xi_i^{(n)} + \zeta_i^{(n)}) y_{\mu i} - \tilde{q}_i y_{\mu i} - (r y'_\mu)'_i + \\ + \lambda_\mu \cdot \Delta(\sigma^{(n)}_{i-1/2} \Delta y_{\mu i-1}).$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $h F_i^{(n,\nu)}$, summieren über alle i und erhalten unter teilweiser Anwendung partiellen Summierens

$$\lambda_\mu d^{(n)}_{\mu\nu} = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_\mu \xi_i^{(n)} + \xi_i^{(n)}) y_{\mu i} \cdot F_i^{(n,\nu)} \cdot h - \lambda_\mu h^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^{(n)}_{i-1/2} \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} \tag{43}$$
$$- \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i y_{\mu i} \cdot F_i^{(n,\nu)} h - \sum_{i=1}^{n-1} (r y'_\mu)'_i \cdot F_i^{(n,\nu)} \cdot h.$$

Aus (39′) fließt

$$A^{(n)}_\nu d^{(n)}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_{i-1/2} \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q}_i y_{\mu i} F_i^{(n,\nu)} \cdot h. \tag{39‴}$$

Wir ziehen (39‴) und (43) voneinander ab und erhalten

$$(\lambda_\mu - A^{(n)}_\nu) d^{(n)}_{\mu\nu} = h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} h(\lambda_\mu \xi_i^{(n)} + \zeta_i^{(n)}) y_{\mu i} F_i^{(n,\nu)} - \sum_{i=1}^{n-1} (r y'_\mu)'_i F_i^{(n,\nu)} \cdot h \tag{44}$$
$$- h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_\mu \sigma^{(n)}_{i-1/2} + \tau^{(n)}_{i-1/2}) \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2} \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} = \omega^{(n)}_{\mu\nu}.$$

Wir setzen jetzt

$$A^{(n)}_{\mu\nu} = - \sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2} \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} (r y'_\mu)'_i F_i^{(n,\nu)} \cdot h \tag{45}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1} \cdot r_{i-1/2} \cdot \left\{ y'_{\mu i-1/2} - \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \right\} - \sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(n,\nu)} \left\{ (r y'_\mu)'_i - \frac{\Delta (r y'_\mu)_{i-1/2}}{h} \right\} h.$$

Hierbei geht die zweite Zeile unter Anwendung partiellen Summierens aus der ersten hervor. Ferner setzen wir

$$B^{(n)}_{\mu\nu} = h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_\mu \xi_i^{(n)} + \zeta_i^{(n)}) y_{\mu i} F_i^{(n,\nu)} \cdot h \tag{45′}$$
$$- h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_\mu \sigma^{(n)}_{i-1/2} + \tau^{(n)}_{i-1/2}) \cdot \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \cdot \Delta F^{(n,\nu)}_{i-1}.$$

Auf die geschweiften Klammern in (45) dürfen wir die Formel (15) aus § 1/3 anwenden und also schreiben

$$y'_{\mu i-1/2} - \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} = - h^2 \cdot \frac{y'''_\mu(\delta_i)}{24}, \quad x_i \leqq \delta_i \leqq x_{i+1} \tag{46}$$
$$(r y'_\mu)'_i - \frac{\Delta (r y'_\mu)_{i-1/2}}{h} = - h^2 \frac{(r y'_\mu)'''(\varepsilon_i)}{24}, \quad x_{i-1/2} \leqq \varepsilon_i \leqq x_{i+1/2}.$$

Die Gleichungen (46) und Hilfssatz 5 liefern

$$|A^{(n)}_{\mu\nu}| \leqq h^2 \cdot C_{24} \cdot \nu. \tag{47}$$

Ferner gestattet der Hilfssatz 5 eine Abschätzung von $B_{\mu\nu}^{(n)}$ in der Form

$$|B_{\mu\nu}^{(n)}| \leqq h^2 \cdot C_{25} \cdot \nu. \tag{48}$$

Die Konstanten C_{24} und C_{25} hängen von n und ν nicht ab. Eine Zusammenfassung von (44), (45), (45′), (47) und (48) ergibt

$$|\omega_{\mu\nu}^{(n)}| = |(\lambda_\mu - \Lambda_\nu^{(n)})\, d_{\mu\nu}^{(n)}| \leqq h^2 \cdot \nu (C_{24} + C_{25}). \tag{49}$$

Auf Grund des Hilfssatzes 3 sondern wir jetzt aus der Folge $F^{(n,\nu)}(x)$ bei festem ν eine konvergente Teilfolge aus. Es sei

$$\lim_{j \to \infty} F^{(n_j,\nu)}(x) = F^{(\nu)}(x)$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Dann ist $F^{(\nu)}$ stetig und genügt den Randbedingungen. Aus der Normierung der Polygonfunktionen und aus (32) ergibt sich

$$\int_a^b p\, F^{(\nu)2} \cdot dx = \lim_{j \to \infty} \Big\{ \sum_{i=1}^{n_j - 1} \tilde{p}_i F_i^{(n_j,\nu)2} \cdot h - h \sum_{i=1}^{n_j} (\Delta F_{i-1}^{(n_j,\nu)})^2 \cdot \sigma_{i-1_2}^{(n)} \Big\} = 1. \tag{6′}$$

Also ist

$$F^{(\nu)}(x) \not\equiv 0.$$

Wegen der Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen muß es mindestens einen Index μ geben, so daß

$$\int_a^b p\, F^{(\nu)} \cdot y_\mu\, dx \neq 0.$$

Dann ist auch der gewiß vorhandene Grenzwert

$$\lim_{j \to \infty} d_{\mu\nu}^{(n_j)} = \lim_{j \to \infty} \Big\{ \sum_{i=1}^{n_j - 1} h\, \tilde{p}_i F_i^{(n_j,\nu)} \cdot y_{\mu i} - \sum_{i=1}^{n_j} h\, \sigma_{i-1_2}^{(n)} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n_j,\nu)} \cdot \Delta y_{\mu i-1} \Big\}$$
$$= \int_a^b p\, y_\mu F^{(\nu)} \cdot dx$$

von Null verschieden. Für diesen Index ergibt sich aus (49)

$$\lim_{j \to \infty} \Lambda_\nu^{(n_j)} = \lambda_\mu.$$

Durch diese Relation ist aber μ eindeutig bestimmt. Es kann demnach nur eine Eigenfunktion y_μ geben, die mit $F^{(\nu)}$ einen nicht verschwindenden Fourierkoeffizienten bildet. Es muß daher $F^{(\nu)}$ bis auf einen konstanten Faktor mit y_μ übereinstimmen. Wegen der Gleichung (6′), die der Normierung (6) der Eigenfunktionen entspricht, kann dieser Faktor nur die Werte $+1$ oder -1 annehmen. Es ist also

$$F^{(\nu)}(x) = \pm\, y_\mu(x).$$

Nach dem bekannten Diagonalverfahren von Cantor bestimmen wir eine über alle Grenzen wachsende Teilfolge $n_1, n_2, \ldots$ der natürlichen

ahlen in der Weise, daß die Konvergenz

$$\lim_{j\to\infty} F^{(n_j,\nu)}(x) = \pm y_{\nu'}(x)$$

$$\lim_{j\to\infty} \Lambda_\nu^{(n_j)} = \lambda_{\nu'}$$

r jeden Wert von ν besteht. Für $\nu_1 < \nu_2$ ist $\Lambda_{\nu_1}^{(n)} \leqq \Lambda_{\nu_2}^{(n)}$ und also $\leqq \nu_2'$. Der Fall $\nu_1' = \nu_2'$ ist ausgeschlossen, weil sich sonst der Widerspruch

$$0 = \lim_{j\to\infty} H^{(n_j)}(F^{(n_j,\nu_1)}, F^{(n_j,\nu_2)}) \,.\, h = \pm \int_a^b p\, y_{\nu_1'}^2 \,.\, dx = \pm 1$$

geben würde. Also folgt aus $\nu_1 < \nu_2$ die Beziehung $\nu_1' < \nu_2'$. Unter en Zahlen ν' kommen alle natürlichen Zahlen vor. Wäre z. B. die ahl μ nicht darunter vorhanden, so folgte aus (49)

$$\lim_{j\to\infty} d_{\mu\nu}^{(n_j)} = 0$$

r jeden Wert von ν im Gegensatz zum Hilfssatz 8. Also muß

0) $$\nu' = \nu; \quad \lim_{j\to\infty} F^{(n_j,\nu)} = \pm y_\nu; \quad \lim_{j\to\infty} \Lambda_\nu^{(n_j)} = \lambda_\nu$$

in. Die Funktion $F^{(n,\nu)}$ ist noch bis auf den Faktor ± 1 unbestimmt. etzt legen wir den Faktor in der Weise fest, daß

1) $$\int_a^b (y_\nu - F^{(n,\nu)})^2 \,.\, dx \leqq \int_a^b (y_\nu + F^{(n,\nu)})^2 \,.\, dx$$

in soll. Sollte diese Festlegung nicht eindeutig sein, was nur im alle des Gleichheitszeichens möglich ist, so bestimmen wir den Faktor if irgendeine Weise. Aus (50) und (51) folgt nunmehr

$$\lim_{j\to\infty} F^{(n_j,\nu)} = y_\nu; \quad \lim_{j\to\infty} \Lambda_\nu^{(n_j)} = \lambda_\nu,$$

nd hieraus allgemein

2) $$\lim_{n\to\infty} F^{(n,\nu)} = y_\nu; \quad \lim_{n\to\infty} \Lambda_\nu^{(n)} = \lambda_\nu,$$

avon die erste Konvergenzrelation im Sinne gleichmäßiger Konergenz. — Aus (49) und (52) kann man nunmehr das Resultat

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{\mu\nu}^{(n)}}{h} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu; \quad \lim_{n\to\infty} d_{\mu\mu}^{(n)} = 1$$

nne weiteres gewinnen, das wir sogleich benutzen werden. Es ist

$$\frac{y_{\mu i}}{h} - d_{\mu\mu}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,\mu)}}{h} = \sum_{k=1}^{k_1-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} + \sum_{k=k_1}^{n-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h}, \quad n > k_1, \quad k \neq \mu,$$

obei k_1 auf Grund des Hilfssatzes 2 so gewählt ist, daß

$$\Lambda_k^{(n)} > C_9 k^2 > |\lambda_\mu| \quad \text{für} \quad k \geqq k_1 \geqq k_0$$

zutrifft. Dann folgt aus (49)

$$(54') \qquad |d_{\mu k}^{(n)}| \leqq \frac{h^2 \cdot k\,(C_{24} + C_{25})}{C_9 \cdot k^2 - |\lambda_\mu|}, \quad k \geqq k_1.$$

Wegen des Hilfssatzes 6 ist ferner

$$(54) \qquad \left| d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} \right| \leqq \frac{C \cdot k^{5/2} \cdot h^2\,(C_{24} + C_{25})}{C_9 k^2 - |\lambda_\mu|} \leqq \frac{C(b-a)^2 \cdot k^{1/2}\,(C_{24} + C_{25})}{C_9 k^2 - |\lambda_\mu|}.$$

Wenn wir nunmehr eine Zahl $\varepsilon > 0$ vorgeben, können wir k_1 so groß wählen, daß

$$\left| \sum_{\substack{k=k_1 \\ k \neq \mu}}^{n-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Das folgt unmittelbar aus (54). Andererseits können wir wegen (53) bei festem k_1 eine Zahl $N_4 > k_1$ so bestimmen, daß

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \mu}}^{k_1-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n \geqq N_4$$

und somit

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \mu}}^{n-1} d_{\mu k}^{(n)} \frac{\Delta F_i^{(n,k)}}{h} \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq N_4$$

ist. Nunmehr dürfen wir

$$\lim_{n \to \infty} (y_\mu^{(n)\prime} - d_{\mu\mu}^{(n)} F^{(n,\mu)\prime}) = 0$$

schreiben und diese Relation im Sinne gleichmäßiger Konvergenz lesen. Nach dem Hilfssatz 1 konvergieren aber die Funktionen $y_\mu^{(n)\prime}$ gleichmäßig gegen y_μ'. Diese Tatsache und (53) liefern im Verein mit der vorstehenden Beziehung

$$(55) \qquad \lim_{n \to \infty} F^{(n,\mu)\prime} = y_\mu'.$$

Wir kehren jetzt zu den Formeln (44) und (45) zurück. Unter Benutzung von (46), (52) und (55) erkennt man, daß die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{B_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} = B_{\mu\nu} = \int_a^b (\lambda_\mu \xi + \zeta)\, y_\mu \cdot y_\nu \, dx - \int_a^b (\lambda_\mu \sigma + \tau)\, y_\mu' y_\nu' \, dx$$

$$(56) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{A_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} = A_{\mu\nu} = \frac{1}{24} \int_a^b y_\nu (r y_\mu')''' \, dx - \frac{1}{24} \cdot \int_a^b y_\nu' \cdot r y_\mu''' \, dx$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_\mu - \lambda_\nu^{(n)}}{h^2} d_{\mu\nu}^{(n)} = \omega_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$$

existieren müssen. Wir fassen jetzt alles wesentliche im folgenden Satz zusammen.

Satz 4 (Hauptkonvergenzsatz). Im Sinne gleichmäßiger Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} F^{(n,\mu)} = y_\mu; \quad \lim_{n\to\infty} F^{(n,\mu)'} = y'_\mu,$$

und ferner ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda_\mu - A_\nu^{(n)})}{h^2} d_{\mu\nu}^{(n)} = \int_a^b (\lambda_\mu \xi + \zeta) y_\mu y_\nu \, dx \int_a^b (\lambda_\mu \sigma + \tau) y'_\mu y'_\nu \, dx$$

$$- \frac{1}{24} \int_a^b \{y'_\nu r y'''_\mu - y_\nu (r y'_\mu)'''\} \, dx = \omega_{\mu\nu}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_\mu - A_\mu^{(n)}}{h^2} = \omega_{\mu\mu}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{d_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} = \frac{\omega_{\mu\nu}}{\lambda_\mu - \lambda_\nu}; \quad \mu \neq \nu; \quad \lim_{n\to\infty} d_{\mu\mu}^{(n)} = 1,$$

wenn alle bisher genannten Voraussetzungen erfüllt sind.

§ 9.

Die Hauptformel. Spezielle Differenzengleichungen.

In diesem Paragraphen werden wir den Grenzwert

$$\omega_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$$

in eine besonders übersichtliche Gestalt bringen. Wir schicken zunächst eine Integralformel voraus. Es sei $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion im Grundintervall $\langle a, b\rangle$. Dann bestehen die folgenden Integralrelationen, die unter Benutzung von (1) und partieller Integration auseinander hervorgehen.

$$= \int_a^b f r y'_\mu y'_\nu \, dx = -\int_a^b y_\nu (f r y'_\mu)' \, dx = -\int_a^b f y_\nu (r y'_\mu)' \, dx - \int_a^b (r f') y_\nu y'_\mu \, dx$$

$$= \int_a^b (\lambda_\mu p + q) f y_\mu y_\nu \, dx - \int_a^b (r f') y_\nu y'_\mu \, dx$$

$$= \int_a^b (\lambda_\nu p + q) f y_\mu y_\nu \, dx - \int_a^b (r f') y'_\nu y_\mu \, dx.$$

Daraus folgt

$$J = \int_a^b \left(\frac{\lambda_\mu + \lambda_\nu}{2} p + q\right) f y_\mu y_\nu \, dx - \frac{1}{2} \int_a^b (r f')(y_\nu y_\mu)' \, dx$$

(7)

$$= \int_a^b y_\mu y_\nu \cdot \left\{\left(\frac{\lambda_\mu + \lambda_\nu}{2} p + q\right) \cdot f + \frac{1}{2} (r f')'\right\} \cdot dx.$$

Jetzt formen wir $A_{\mu\nu}$ um. Wenn wir partiell integrieren und die Gleichung (1) anwenden, erhalten wir

$$24\,A_{\mu\nu} = \int_a^b y'_\nu \cdot [(r y'_\mu)'' + r y'''_\mu] \cdot dx = \int_a^b \cdot [(r y'_\mu)' y''_\nu + (r y'_\nu)' \cdot y''_\mu]\, dx - r y'_\nu y''_\mu \Big|_a$$

$$= -\int_a^b \frac{(r y'_\mu)'}{r} \cdot [r' y'_\nu + (\lambda_\nu p + q) y_\nu] \cdot dx -$$

$$-\int_a^b \frac{(r y'_\nu)'}{r} [r' \cdot y'_\mu + (\lambda_\mu p + q) y_\mu] \cdot dx + r' \cdot y'_\mu y'_\nu \Big|_a^b$$

$$= -\int_a^b \frac{r'}{r^2} \cdot \{(r y'_\mu)' \cdot r y'_\nu + (r y'_\nu)' r y'_\mu\}\, dx +$$

$$+ 2\int_a^b \frac{1}{r} (\lambda_\mu p + q)(\lambda_\nu p + q) y_\mu y_\nu\, dx + r' \cdot y'_\mu y'_\nu \Big|_a^b$$

$$= \int_a^b r^2 \cdot \left(\frac{r'}{r^2}\right)' \cdot y'_\mu y'_\nu\, dx + 2\int_a^b \frac{1}{r} (\lambda_\mu p + q)(\lambda_\nu p + q) y_\mu y_\nu\, dx.$$

Hieraus und aus (56) können wir

$$A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} = \int_a^b y_\mu y_\nu \left\{ \frac{(\lambda_\mu p + q)(\lambda_\nu p + q)}{12\,r} + \lambda_\mu \xi + \xi \right\} dx +$$

$$+ \int_a^b r y'_\mu y'_\nu \cdot \left[-r \cdot \left(\frac{1}{24\,r}\right)'' - \frac{\lambda_\mu \sigma + \tau}{r} \right] \cdot dx$$

ableiten. Auf das zweite Integral der rechten Seite wenden wir di
Formel (57) an. Zuvor setzen wir

$$\tau = -\frac{1}{24} r^2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right)'' + \tau^*$$

und setzen jetzt zusätzlich voraus, daß die Funktionen σ und τ^* zwei
mal stetig differenzierbar sind. Wir erhalten insgesamt

$$(58)\quad \omega_{\mu\nu} = \int_a^b y_\mu y_\nu \cdot \left\{ \begin{array}{r} \dfrac{(\lambda_\mu p + q)(\lambda_\nu p + q)}{12\,r} - \dfrac{\lambda_\mu \sigma + \tau^*}{r} \left(\dfrac{\lambda_\mu + \lambda_\nu}{2} \cdot p + q \right) + \\ + \lambda_\mu \xi + \xi - \left[r \cdot \left(\dfrac{\lambda_\mu \sigma + \tau^*}{2\,r} \right) \right]' \end{array} \right\} dx$$

Dies ist die angekündigte Hauptformel. Für $\mu = \nu$ ist

$$(59)\quad \omega_{\mu\mu} = \int_a^b y_\mu^2 \cdot \left\{ \frac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12\,r} - (\lambda_\mu p + q) \frac{\lambda_\mu \sigma + \tau^*}{r} + \lambda_\mu \xi + \xi \right.$$

$$\left. - \left[r \left(\frac{\lambda_\mu \sigma + \tau^*}{2\,r} \right)' \right]' \right\} dx.$$

iese Formel gewährt einen guten Einblick in die Konvergenz der ifferenzeneigenwerte, wie die folgenden drei Beispiele zeigen werden, elche alle erforderlichen Voraussetzungen, insbesondere auch die des ilfssatzes 7, erfüllen. Die Formen $H^{(n)}(u, u)$ sind bei allen Beispielen urchweg positiv definit.

1. Es sei $\sigma^{n)} \equiv \xi^{(n)} \equiv \zeta^{n)} \equiv \tau^* \equiv 0$, also $\tau = -\frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)''$. Dann efert (59)

$$\omega_{\mu\mu} = \int_a^b y_\mu^2 \frac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12\, r}\, dx > 0.$$

ast alle Differenzeneigenwerte liegen unterhalb des Eigenwerts, gegen en sie konvergieren. Mit großer Wahrscheinlichkeit können sie als ntere Schranken der Eigenwerte angesehen werden. Für große μ ist symptotisch

$$\omega_{\mu\mu} \cong \bar{\omega}_{\mu\mu} = \lambda_\mu^2 \cdot \int_a^b y_\mu^2 \cdot \frac{p^2}{12\, r}\, dx > 0.$$

2. Es sei $\sigma^{(n)} \equiv \tau^{(n)} \equiv \xi^{(n)} \equiv \zeta^{(n)} \equiv 0$. Dann ist

$$\tau^* = \frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)''.$$

s handelt sich um das normale Verfahren. Die Funktion r muß dabei iermal stetig differenzierbar sein. Wir erhalten aus (59)

$$\omega_{\mu\mu} = \int_a^b y_\mu^2 \cdot \left\{ \frac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12\, r} - \frac{\lambda_\mu p + q}{r} \cdot \tau^* - \left[r \left(\frac{\tau^*}{2\, r} \right)' \right]' \right\} dx.$$

ber das Vorzeichen von $\omega_{\mu\mu}$ läßt sich ohne weiteres nichts sagen. ie geschweifte Klammer ist positiv und damit auch $\omega_{\mu\mu}$, wenn

$$-3\,\tau^{*2} - r\left(r \cdot \left(\frac{\tau^*}{r}\right)'\right)' \geqq 0 \quad \text{oder} \quad r^3 \cdot \varrho^2 + 8\,(r \cdot (\varrho\, r)')' \leqq 0; \qquad \varrho = \left(\frac{1}{r}\right)''$$

ilt. Asymptotisch die gleiche Formel wie beim ersten Beispiel. Bezeichnen wir den Grenzwert von $\omega_{\mu\nu}^{(n)}$ für das Verfahren des ersten eispiels mit $\tilde{\omega}_{\mu\nu}$, so darf man unter Benutzung von (56) auch schreiben

$$59') \quad \omega_{\mu\mu} - \tilde{\omega}_{\mu\mu} = \int_a^b (\lambda_\mu \xi + \zeta)\, y_\mu^2 \cdot dx + \int_a^b \left[-\frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)'' - \lambda_\mu \sigma - \tau \right] \cdot y_\mu'^2 \cdot dx.$$

iese Formel ist recht brauchbar, um Vergleiche zwischen dem Verahren nach (1) und einem anderen Verfahren, insbesondere dem des weiten Beispiels, anzustellen. Im Falle der normalen Gleichungen ist

$$\omega_{\mu\mu} - \tilde{\omega}_{\mu\mu} = -\int_a^b \frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)'' \cdot y_\mu'^2\, dx.$$

Gilt nun $\left(\frac{1}{r}\right)'' \leqq 0$, so ist $\omega_{\mu\mu} \cdot \tilde{\omega}_{\mu\mu} \geqq 0$, so daß auch beim normalen Verfahren fast alle Differenzeneigenwerte unterhalb des zugehörigen Eigenwerts liegen.

3. Es sei

$$\sigma^{(n)} = \frac{p}{12}, \quad \tau^* = \frac{q}{12}, \quad \xi = \left(r\left(\frac{p}{24\,r}\right)'\right)', \quad \xi = \left(r\left(\frac{q}{24\,r}\right)'\right)'.$$

Dann verschwindet $\omega_{\mu\mu}$, und es findet somit eine besonders starke Konvergenz statt. Man kann vermuten, daß sogar der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_\mu - \Lambda_\mu^{(n)}}{h^4}$$

existiert. Dies läßt sich in der Tat unter schärferen Voraussetzungen als sie bisher benötigt wurden, beweisen. Dazu ist aber eine Fortsetzung der allgemeinen Untersuchungen notwendig, die in den nächsten Paragraphen erfolgen soll. Danach werden das erste und dritte Beispiel erneut behandelt werden.

§ 10.

Ein Konvergenzsatz über die Polygonfunktionen der Differenzeneigenlösungen.

Wir setzen jetzt r, p, q als viermal stetig differenzierbar voraus. Dann besitzen die Eigenfunktionen y_μ und die Funktionen $r\,y'_\mu$ stetige Ableitungen bis zur 5. Ordnung. Für $\sigma^{(n)}$ sollen die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 erfüllt sein. Es sollen aber auch die zweiten Differenzenquotienten von $\sigma^{(n)}$ und $\tau^{(n)}$ ihrem Betrage nach gleichmäßig in n und in den Argumenten beschränkt sein. Die gleiche Beschränkung möge für die ersten Differenzenquotienten von $\xi^{(n)}$ und $\xi^{(n)}$ zutreffen. Alle diese Voraussetzungen ermöglichen eine schärfere Abschätzung der Zahlen $d_{\mu\nu}^{(n)}$. Ersetzen wir die geschweiften Klammern in (45) durch die verallgemeinerten Tangententrapezformeln (16), so wird

$$A_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{h^2}{24} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} h\, F_i^{(n,\nu)} \cdot (r\,y'_\mu)'''_i - \frac{h^2}{24} \cdot \sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\, y'''_{\mu\,i-1/2} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,\nu)} + R_{\mu\nu}^{(n)}$$

$$R_{\mu\nu}^{(n)} = -\frac{h^4}{2^4 \cdot 5!} \cdot \sum_{i=1}^{n} r_{i-1/2}\, y_\mu^{(\mathrm{V})}(\beta_i) \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,\nu)} + \frac{h^4}{2^4 \cdot 5!} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} h\, F_i^{(n,\nu)} \cdot (r\,y'_\mu)^{(\mathrm{V})}_{\beta'_i};$$

$$x_{i-1} \leqq \begin{matrix}\beta_i \\ \beta_{i'}\end{matrix} \leqq x_{i+1}$$

Der Rest $R_{\mu\nu}^{(n)}$ läßt sich unter Benutzung des Hilfssatzes 5 leicht abschätzen. Es ist

$$|R_{\mu\nu}^{(n)}| \leqq h^4 \cdot \nu \cdot C_{26}, \tag{60}$$

wobei die Konstante C_{26} von n und ν nicht abhängt. Die zweite

umme im obigen Ausdruck für $A_{\mu\nu}^{(n)}$ formen wir durch partielles Summieren nach $\Delta F_{i-1}^{(n,\nu)}$ um. Wir erhalten

$$A_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{h^2}{24} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} h F_i^{(n,\nu)} \cdot \left\{ (r y_\mu')_i''' + \frac{\Delta (r_{i-1/2} y_{\mu i-1/2}''')}{h} \right\} + R_{\mu\nu}^{(n)}$$

$$= h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} h F_i^{(n,\nu)} \cdot z_i \cdot \tilde{p}_i + R_{\mu\nu}^{(n)} \quad \text{mit}$$

$$z_i = \frac{1}{24 \tilde{p}_i} \left\{ (r y_\mu')_i''' + \frac{\Delta (r_{i-1/2} y_{\mu i-1/2}''')}{h} \right\}; \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

amit die Werte z_i wohldefiniert sind, müssen wir voraussetzen, daß hinreichend groß ist. Es gibt eine Zahl $N_5 > 0$ von der Beschaffenheit, daß

$$\tilde{p} \geqq \frac{C_1}{2} \qquad \text{für} \quad n \geqq N_5$$

t. Für den Rest dieses Paragraphen denken wir uns $n \geqq N_5$ gehält. Wegen der eingangs beschriebenen Voraussetzungen ist die bschätzung

$$z_i \leqq C_{27}, \quad |\Delta z_i| \leqq h C_{27} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n-2$$

öglich mit einer von n und ν unabhängigen Konstanten C_{27}. Es ist

$$\frac{A_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} = h \cdot H^{(n)}(F_i^{(n,\nu)}, z_j) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1/2}^{(n)} \Delta z_{i-1} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,\nu)} \cdot h + \frac{R_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2}$$

$$= h \cdot H^{(n)}(F_i^{(n,\nu)}, z_j) + z_1 \cdot F_1^{(n,\nu)} \cdot \sigma_{1/2}^{(n)} h + z_{n-1} \cdot \sigma_{n-1/2}^{(n)} \cdot F_{n-1}^{(n,\nu)} \cdot h$$

$$+ h^2 \cdot \sum_{i=2}^{n-1} h \cdot \frac{\Delta z_{i-1}}{h} \cdot \frac{\Delta F_{i-1}^{(n,\nu)}}{h} \sigma_{i-1/2}^{(n)} + \frac{R_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2}; \qquad z_0 = z_n = 0.$$

ierbei dürfen wir $h \cdot H^{(n)}$ nach Formel (40), die rechts stehende Summe ach Hilfssatz 5 und die restlichen Glieder (außer $R_{\mu\nu}^{(n)}$) nach dem ilfssatz 7 abschätzen. Unter Berücksichtigung von (60) gewinnen wir

$$\left| \frac{A_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} \right| \leqq \frac{C_{28}}{\nu}, \quad \nu \geqq k_0, \tag{61}$$

obei die Konstante C_{28} von n und ν nicht abhängt. Nach der leichen Methode behandeln wir $B_{\mu\nu}^{(n)}$. Die Anwendung der Formel 6), partielles Summieren nach $\Delta F_{i-1}^{(n,\nu)}$ und die Einführung neuer rößen z_i nach dem obigen Muster führt unter Ausnutzung der zutzlichen Voraussetzungen zu

$$\left| \frac{B_{\mu\nu}^{(n)}}{h^2} \right| \leqq \frac{C_{29}}{\nu}, \quad \nu \geqq k_0. \tag{61'}$$

Die Abschätzungen (61) und (61′) ermöglichen es, die Abschätzungen (54′) und (54) zu ersetzen durch

$$(62) \qquad \left|\frac{d_{\mu k}^{(n)}}{h^2}\right| \leqq \frac{C_{30}}{k^3}; \quad \left|\frac{d_{\mu k}^{(n)} \cdot \Delta F_{i-1}^{(n,k)}}{h^3}\right| \leqq \frac{C_{30}}{k^{3/2}}: \; k \geqq k_1 \geqq k_0,$$

wobei $C_{30} > 0$ von n und k nicht abhängt. Wir setzen jetzt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_{\mu k}^{(n)}}{h^2} = d_{\mu k} = \frac{\omega_{\mu k}}{\lambda_\mu - \lambda_k}. \qquad k \neq \mu$$

Aus (62) und dem 4. Satz folgt jetzt

$$(62') \qquad |d_{\mu k}| \leqq \frac{C_{30}}{k^3}, \; |d_{\mu k} \cdot y_k'(x)| \leqq \frac{C_{30}}{k^{3/2}}; \; k \geqq k_1 \geqq k_0: \qquad k \neq \mu$$

Die Reihe

$$(63) \qquad \varphi_\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{\mu k} y_k(x); \qquad k \neq \mu$$

konvergiert wegen (7) und (62′) absolut und gleichmäßig. Das gleiche gilt für ihre formale Ableitung. Demnach ist φ_μ stetig differenzierbar, genügt den Randbedingungen, und es ist

$$\varphi_\mu'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{\mu k} y_k'(x); \qquad k \neq \mu$$

Die Funktionen

$$\frac{1}{h^2}\left(y_\mu^{(n)\prime}(x) - d_{\mu\mu}^{(n)} \cdot F^{(n,\mu)\prime}(x)\right)$$

konvergieren, so behaupte ich nun, gleichmäßig gegen $\varphi_\mu'(x)$. Um dies zu beweisen, geben wir uns eine Zahl $\varepsilon > 0$ vor und schreiben

$$\varphi_\mu'(x) - \frac{1}{h^2}\cdot\left(y_\mu^{(n)\prime} - d_{\mu\mu}^{(n)} \cdot F^{(n,\mu)\prime}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \mu}}^{k_1 - 1}\left[d_{\mu k} y_k' - \frac{d_{\mu k}^{(n)}}{h^2} \cdot F^{(n,k)\prime}\right] + P \text{ mit}$$

(64)

$$P = \sum_{k=k_1}^{\infty} d_{\mu k} y_k' - \sum_{\substack{k=k_1 \\ k \neq \mu}}^{n-1} \frac{d_{\mu k}^{(n)}}{h^2} \cdot F^{(n,k)\prime}.$$

Es gilt wegen (62) und (62′)

$$|P| \leqq 2 \cdot \sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{C_{30}}{k^{3/2}};$$

wenn wir also k_1 groß genug machen, können wir $|P|$ unterhalb $\frac{\varepsilon}{2}$ drücken. Machen wir bei einem solchen k_1 noch n hinreichend groß, so können wir auch die erste Summe in (64) dem Betrage nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ und daher

$$\left|\varphi_\mu' - \frac{1}{h^2}\left(y_\mu^{(n)\prime} - d_{\mu\mu}^{(n)} F^{(n,\mu)\prime}\right)\right| \leqq \varepsilon$$

machen. Damit ist die Behauptung bewiesen. Erst recht läßt sich

uf diesem Wege zeigen, daß die Konvergenz

$$\varphi_\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{h^2} (y_\mu^{(n)} \quad d_{\mu\mu}^{(n)} F^{(n,\mu)})$$

leichmäßig stattfinden muß.

Wir untersuchen jetzt noch die Konvergenz der Koeffizienten $_{\mu\mu}^{(n)}$ gegen Eins genauer. Nach der Sehnentrapezformel haben wir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{h^2} \left(\int_a^b p y_\mu^2 \, dx - \sum_{i=1}^{n-1} p_i y_{\mu i}^2 h \right) = -\frac{1}{12} \cdot \int_a^b (p y_\mu^2)'' dx = 0. \tag{65}$$

Wir setzen jetzt

$$y_{\mu i}^{(n)} = y_{\mu i} = d_{\mu\mu}^{(n)} \cdot F_i^{(n,\mu)} + \psi_{\mu i}^{(n)} \cdot h^2.$$

ie hierdurch definierten Polygonfunktionen $\psi_{\mu(x)}^{(n)}$ konvergieren gleichäßig gegen φ_μ. Es besteht nun die Beziehung

$$H^{(n)}(F^{(n,\mu)}, \ \psi_\mu^{(n)}) = 0.$$

ragen wir dies in (65) ein und beachten wir die Normierung der igenfunktionen, so erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{h^2} \left[1 - H^{(n)}(y_\mu, y_\mu) h + h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{(n)} \cdot y_{\mu i}^2 h - h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1,2}^{(n)} \left(\frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \right)^2 \cdot h \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{h^2} \left\{ 1 - d_{\mu\mu}^{(n)2} - h^5 \cdot H^{(n)}(\psi_\mu^{(n)}, \ \psi_\mu^{(n)}) + h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{(n)} \cdot y_{\mu i}^2 h \right.$$

$$\left. - h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i-1,2}^{(n)} \left(\frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \right)^2 \cdot h \right\} = 0.$$

ieraus folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - d_{\mu\mu}^{(n)}}{h^2} = \delta_\mu = \frac{1}{2} \int_a^b \sigma \cdot y_\mu'^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_a^b \xi \cdot y_\mu^2 \cdot dx. \tag{66}$$

an erkennt jetzt, daß auch die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{h^2} (y_\mu^{(n)} - F^{(n,\mu)}) = \varphi_\mu - \delta_\mu \cdot y_\mu(x) = \Phi_\mu(x) \tag{67}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{h^2} (y_\mu^{(n)\prime} - F^{(n,\mu)\prime}) = \varphi_\mu' - \cdot \delta_\mu \cdot y_\mu'(x) = \Phi_\mu'(x) \tag{68}$$

n Sinne gleichmäßiger Konvergenz existieren müssen.

Satz 5. Sind r, p, q viermal stetig differenzierbar, genügen die unktionen $\sigma^{(n)}$ den Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 und sind ferner e ersten Differenzenquotienten von $\xi^{(n)}$ und $\xi^{(n)}$ sowie die zweiten on $\sigma^{(n)}$ und $\tau^{(n)}$ dem Betrage nach gleichmäßig in n und in den

Argumenten beschränkt, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-d_{\mu\mu}^{(n)}}{h^2}=\delta_\mu=\frac{1}{2}\int_a^b\sigma\cdot y_\mu'^2\,dx-\frac{1}{2}\int_a^b\xi\cdot y_\mu^2\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_\mu^{(n)}-F^{(n,\mu)}}{h^2}=\Phi_\mu(x);\ \lim_{n\to\infty}\frac{y_\mu^{(n)\prime}-F^{(n,\mu)\prime}}{h^2}=\Phi_\mu'(x),$$

und zwar die letzteren im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Die Funktion $\Phi_\mu(x)$ ist stetig und stetig differenzierbar. Sie läßt sich in die Reihe

$$\Phi(x)=-\delta_\mu\cdot y_\mu(x)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq\mu}}^{\infty}d_{\mu k}y_k(x);\ d_{\mu k}=\frac{\omega_{\mu k}}{\lambda_\mu-\lambda_k}$$

entwickeln.

§ 11.

Eine Eigenschaft der Funktionen φ_μ und Φ_μ.

Es seien die Voraussetzungen des 5. Satzes erfüllt, dazu seien die Funktionen σ und τ stetig differenzierbar. Dann können wir die Formeln (56) durch partielle Integration auf die Gestalt

$$\omega_{\mu\nu}=\int_a^b y_\nu L(y_\mu;\lambda_\mu)\,dx\qquad\text{mit}$$

$$L(y;\lambda)=\frac{1}{24}\{(ry')''+(ry''')'\}+(\lambda\xi+\xi)y+[(\lambda\sigma+\tau)y']'$$

bringen. Wir betrachten jetzt die inhomogene Differentialgleichung

$$(ry')'+(\lambda_\mu p+q)y=L(y_\mu;\lambda_\mu)-\omega_{\mu\mu}p\,y_\mu=f(x).$$

Sie besitzt nach § 1/1 eine den Randbedingungen genügende Lösung, denn die Funktion f bildet mit y_μ das verschwindende Integral

$$\int_a^b f\,y_\mu\,dx=0.$$

Es sei y diejenige Lösung, die mit y_μ das verschwindende Integral

$$\int_a^b p\,y_\mu\,y\,dx=0$$

bildet. Indem wir die obige Differentialgleichung mit y_ν multi

lizieren und danach über das Grundintervall integrieren, entsteht

$$\int_a^b [(r y')' y_\nu + (\lambda_\mu p + q) y_\nu y]\, dx = \int_a^b y_\nu L(y_\mu; \lambda_\mu)\, dx - \omega_{\mu\mu} \int_a^b p\, y_\mu y_\nu\, dx$$

der

$$\int_a^b y \cdot \{(r y_\nu')' + (\lambda_\mu \cdot p + q) y_\nu\}\, dx = \omega_{\mu\nu}; \qquad \nu \neq \mu$$

der

$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu) \cdot \int_a^b \cdot p\, y_\nu y\, dx = \omega_{\mu\nu}.$$

omit ist

$$\int_a^b p\, y_\nu y \cdot dx = \frac{\omega_{\mu\nu}}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} = d_{\mu\nu}. \qquad \nu \neq \mu$$

Die Funktion $(y - \varphi_\mu)$ ist also zu allen Eigenfunktionen orthogonal. Sie muß daher identisch verschwinden. Also ist $y = \varphi_\mu$ diejenige Lösung der inhomogenen Gleichung, welche mit y_μ einen verschwindenden Fourierkoeffizienten bildet. Demnach ist sowohl φ_μ als auch Φ_μ sogar zweimal stetig differenzierbar, und es gelten die Formeln

(69) $$(r \varphi_\mu')' + \varphi_\mu (\lambda_\mu p + q) = L(y_\mu; \lambda_\mu) - \omega_{\mu\mu} p\, y_\mu$$

(69′) $$(r \Phi_\mu')' + \Phi_\mu (\lambda_\mu p + q) = L(y_\mu; \lambda_\mu) - \omega_{\mu\mu} p\, y_\mu.$$

§ 12.

Weitere Konvergenzbetrachtungen.

Wir übernehmen die Voraussetzungen des 5. Satzes. Zusätzlich setzen wir die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma - \sigma^{(n)}}{h^2} = \bar{\sigma}; \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\tau - \tau^{(n)}}{h^2} = \bar{\tau}; \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\xi - \xi^{(n)}}{h^2} = \bar{\xi};$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\zeta - \zeta^{(n)}}{h^2} = \bar{\zeta}$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz voraus. Wir knüpfen jetzt an die Relationen (44), (45), (45′), (46) des § 7 an. Indem wir dort $\sigma^{(n)}$ durch σ, $\tau^{(n)}$ durch τ, $\xi^{(n)}$ durch ξ, $\zeta^{(n)}$ durch ζ und $F^{(n,\nu)}$ durch y_ν ersetzen, erhalten wir bei dem folgenden Grenzübergang unter Berücksichtigung des 4. und 5. Satzes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{h^4} \Bigg\{ \omega_{\mu\nu}^{(n)} - h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_\mu \xi_i + \zeta_i)\, y_{\mu i} y_{\nu i} h$$

$$+ h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_\mu \sigma_{i-1/2} + \tau_{i-1/2}) \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \cdot \Delta y_{\nu i-1} - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i-1/2} \cdot \Delta y_{\nu i-1} \left[y'_{\mu i-1/2} - \frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h} \right]$$

(70) $$+ \sum_{i=1}^{n-1} y_{\nu i} \cdot \left[(r y'_\mu)'_i - \frac{\Delta (r y'_\mu)_{i-1/2}}{h} \right] h \Bigg\} = -\int_a^b (\lambda_\mu \bar{\xi} + \bar{\zeta})\, y_\mu \cdot y_\nu\, dx$$

$$+ \int_a^b (\lambda_\mu \bar{\sigma} + \bar{\tau})\, y'_\mu y'_\nu\, dx - \int_a^b \Phi_\nu L(y_\mu; \lambda_\mu)\, dx = E_1.$$

Ferner ist gemäß (16)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n}r_{i-1/2}\cdot\Delta y_{\nu i-1}\cdot y'''_{\mu i-1/2}+\sum_{i=1}^{n}r_{i-1/2}\cdot\Delta y_{\nu i-1}\cdot\left[y'_{\mu i-1/2}-\frac{\Delta y_{\mu i-1}}{h}\right]\right.$$

$$(71)\qquad =-\frac{1}{2^4\cdot 5!}\cdot\int_a^b y_\mu^{(V)}\cdot(r\,y'_\nu)\,dx=E_2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{-\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}y_{\nu i}\cdot(r\,y'_\mu)''_i-\sum_{i=1}^{n-1}y_{\nu i}\cdot\left[(r\,y'_\mu)'_i-\frac{\Delta(r\,y'_\mu)_{i-1/2}}{h}\right]h\right\}$$

$$(72)\qquad =\frac{1}{2^4\cdot 5!}\int_a^b y_\nu\cdot(r\,y'_\mu)^{(V)}\cdot dx=E_3.$$

Weiterhin findet man auf Grund der Sehnentrapezformel (15)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n}r_{i-1/2}\,y'_{\nu i-1/2}\,y'''_{\mu i-1/2}\cdot h-\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n}r_{i-1/2}\cdot\Delta y_{\nu i-1/2}\cdot y'''_{\mu i-1/2}\right.$$

$$(73)\qquad =-\frac{1}{24^2}\cdot\int_a^b r\,y'''_\nu\cdot y'''_\mu\,dx=E_4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{-h^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\lambda_\mu\sigma_{i-1/2}+\tau_{i-1/2})\cdot\frac{\Delta y_{\nu i-1}}{h}\cdot\Delta y_{\mu i-1}\right.$$

$$(74)\qquad \left.+h^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\lambda_\mu\sigma_{i-1/2}+\tau_{i-1/2})\,y'_{\nu i-1/2}\cdot y'_{\mu i-1/2}\cdot h\right\}$$

$$=-\frac{1}{24}\cdot\int_a^b(\lambda_\mu\sigma+\tau)\,(y'_\nu\cdot y'''_\mu+y'_\mu\,y'''_\nu)\,dx=E_5$$

und gemäß der Formel (13)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{h^2\cdot\int_a^b(\lambda_\mu\sigma+\tau)\,y'_\mu\,y'_\nu\,dx-h^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\lambda_\mu\sigma_{i-1/2}+\tau_{i-1/2})\,y'_{\mu i-1/2}\cdot y'_{\nu i-1/2}\cdot h\right.$$

$$(75)\qquad =\frac{1}{24}\cdot\int_a^b[(\lambda_\mu\sigma+\tau)\,y'_\mu y'_\nu]''\cdot dx=E_6$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{-\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n}r_{i-1/2}\,y'_{\nu i-1/2}\cdot y'''_{\mu i-1/2}\cdot h+\frac{h^2}{24}\cdot\int_a^b r\,y'_\nu\,y'''_\mu\cdot dx\right\}$$

$$(76)\qquad =\frac{1}{24^2}\int_a^b[r\,y'_\nu\,y'''_\mu]''\cdot dx=E_7.$$

Wegen (14) ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^4}\cdot\left\{h^2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_\mu\xi_i+\zeta_i)\,y_{\mu i}\,y_{\nu i}\cdot h - h^2\cdot\int_a^b(\lambda_\mu\xi+\zeta)\,y_\mu y_\nu\,dx\right\}$$

77)
$$= \frac{1}{12}\,[\lambda_\mu\xi+\zeta)\,y_\mu y_\nu]'\Big|_a^b = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^4}\cdot\left\{\frac{h^2}{24}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}y_{\nu i}(r\,y'_\mu)'''_i\cdot h - \frac{h^2}{24}\cdot\int_a^b y_\nu(r\,y'_\mu)'''\,dx\right\}$$

78)
$$= \frac{1}{12\,.\,24}\cdot(y_\nu(r\,y'_\mu)''')'\Big|_a^b = E_8.$$

Jetzt addieren wir die Gleichungen (70)—(78) und erhalten

79)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{\mu\nu}^{(n)}-h^2\,.\,\omega_{\mu\nu}}{h^4} = \sum_{i=1}^{8}E_i$$

oder ausführlich geschrieben

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{\mu\nu}^{(n)}-h^2\,.\,\omega_{\mu\nu}}{h} = -\int_a^b(\lambda_\mu\bar\xi+\bar\zeta)\,y_\mu y_\nu\,dx+\int_a^b(\lambda_\mu\bar\sigma+\bar\tau)\,y'_\mu y'_\nu\,dx$$

$$-\int_a^b\Phi_\nu(x)\,.\,L(y_\mu;\lambda_\mu)\,dx+\frac{1}{2^4\,.\,5!}\cdot\int_a^b[y_\nu(r\,y'_\mu)^{(V)}-y'_\nu\,.\,r\,y_\mu^{(V)}]\,.\,dx+$$

$$+\frac{1}{24}\int_a^b\{[(\lambda_\mu\sigma+\tau)\,y'_\mu y'_\nu]''-(\lambda_\mu\sigma+\tau)\,(y'_\nu\,.\,y'''_\mu+y'_\mu y'''_\nu)\}\,dx+$$

$$+\frac{1}{24^2}\cdot\left\{-\int_a^b r\,y'''_\mu y'''_\nu\,dx+(r\,y'_\nu y'''_\mu)'\Big|_a^b+2(y_\nu(r\,y'_\mu)''')'\Big|_a^b\right\}.$$

Aus dem Satz 4, (66), (79) folgt für $\mu=\nu$

$$\lambda_\mu - \Lambda_\mu^{(n)} = h^2\,.\,\omega_{\mu\mu}+h^4\,.\,\Omega_\mu^{(n)} \quad \text{mit}$$

80)
$$\lim_{n\to\infty}\Omega_\mu^{(n)} = \sum_{i=1}^{8}E_i+\delta_\mu\,\omega_{\mu\mu} = \Omega_\mu.$$

§ 13.

Linearkombinationen von Differenzeneigenwerten.

Wir machen jetzt eine erste Anwendung der Formel (80) des vorangehenden Paragraphen. Es ist

$$\lambda_\mu = \Lambda_\mu^{(n)}+\frac{L^2}{n^2}\cdot\omega_{\mu\mu}+\frac{L^4}{n^4}\cdot\Omega_\mu^{(n)}$$

$$\lambda_\mu = \Lambda_\mu^{(m)}+\frac{L^2}{m^2}\cdot\omega_{\mu\mu}+\frac{L^4}{m^4}\cdot\Omega_\mu^{(m)} \qquad L = b-a.$$

Es sei $n \neq m$. Wir multiplizieren die erste der Gleichungen mit n^2 die zweite mit m^2 und ziehen danach beide voneinander ab. Aus de neuen Gleichung berechnen wir λ_μ zu

$$\lambda_\mu = \frac{\Lambda_\mu^{(n)} n^2 - \Lambda_\mu^{(m)} m^2}{n^2 - m^2} - \frac{L^4 \cdot \Omega_\mu}{n^2 \cdot m^2} + R_{nm} \frac{L^4}{n^2 \cdot m^2}.$$

Wir setzen jetzt noch $n = \Theta m$. Dann kann man R_{nm} die Form gebe

$$R_{nm} = \frac{\Theta^2}{\Theta^2 - 1} \cdot \left(\frac{\Omega_\mu^{(m\Theta)} - \Omega_\mu}{\Theta^2} + \Omega_\mu - \Omega_\mu^{(m)} \right).$$

Bei festgehaltenem Θ strebt also R_{nm} gegen Null, wenn m über all Grenzen wächst. Wir nehmen jetzt die Linearkombination

$$\lambda_\mu^{(n,m)} = \frac{\Lambda_\mu^{(n)} n^2 - \Lambda_\mu^{(m)} m^2}{n^2 - m^2}$$

als Näherungswert für λ_μ. Dann lehren die vorstehenden Formeln, daß sein Fehler bei festem Θ von der Größenordnung der vierten Poten der Schrittweite h ist. Im allgemeinen wird man also mit $\lambda_\mu^{(n,m)}$ nähe an λ_μ herankommen als mit $\Lambda_\mu^{(n)}$ und $\Lambda_\mu^{(m)}$. Nun lassen sich die Näherungen $\Lambda_1^{(2)}$ und $\Lambda_1^{(3)}$ für den ersten Eigenwert besonders schnell und leicht berechnen. Ihre Linearkombination liefert

$$\lambda_1^{(2,3)} = \Lambda_1^{(3)} + 0{,}8\,(\Lambda_1^{(3)} - \Lambda_1^{(2)}).$$

Ist $\omega_{\mu\mu} = 0$, so wählen wir die Kombination

$$\bar{\lambda}_\mu^{(n,m)} = \frac{n^4 \cdot \Lambda_\mu^{(n)} - m^4 \cdot \Lambda_\mu^{(m)}}{n^4 - m^4}$$

als Näherungswert. Die Linearkombination aus Λ_1^2 und Λ_1^3 lautet jetz

$$\bar{\lambda}_1^{(2,3)} = \Lambda_1^{(3)} + \frac{16}{65}\,(\Lambda_1^{(3)} - \Lambda_1^{(2)}).$$

Numerische Beispiele werden im Schlußparagraphen gegeben werde

§ 14.

Das starke Differenzenverfahren.

Unter diesem Namen betrachten wir erneut den Fall

$$\sigma = \frac{p}{12}, \qquad \tau = \frac{q}{12} - \frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)'', \qquad \xi = \left(r\left(\frac{p}{24\,r}\right)'\right)', \qquad \zeta = \left(r\left(\frac{q}{24\,r}\right)'\right)$$

Die Differenzengleichungen selbst sind dadurch noch nicht eindeuti bestimmt. Man kann sie etwa in der Form ansetzen, die sich aus

$$\sigma_{i-1/2}^{(n)} = \frac{p_{i-1/2}}{12}, \qquad \tau_{i-1/2}^{(n)} = \frac{q_{i-1/2}}{12} - \frac{r_{i-1/2}''}{6\,h^2} \cdot \left\{ \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+1}} - \frac{2}{r_{i-1/2}} \right\}$$

$$h^2 \cdot \xi_i^{(n)} = \Delta\left(r_{i-1/2}\,\Delta\left(\frac{p_{i-1}}{24\,r_{i-1}}\right)\right); \qquad h^2 \cdot \xi_i^{(n)} = \Delta\left(r_{i-1/2}\,\Delta\left(\frac{q_{i-1}}{24\,r_{i-1}}\right)\right)$$

rgibt. Sind r, p, q viermal stetig differenzierbar, so erfüllt dieses Ver-ahren alle Voraussetzungen der Hauptformel, des Satzes 5 und der ormel (80). Das gleiche trifft übrigens auch für ein Verfahren zu, em wir die Koeffizientenfunktionen

$$\sigma^{(n)} \equiv \sigma, \quad \tau^{(n)} \equiv \tau, \quad \xi^{(n)} \equiv \xi, \quad \zeta^{(n)} \equiv \zeta$$

ugrundelegen. Es ist in jedem Falle $\omega_{\mu\mu} = 0$, und Formel (80) liefert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_\mu - \Lambda_\mu^{(n)}}{h^4} = \sum_{i=1}^{8} E_i.$$

Damit ist die in § 9 ausgesprochene Behauptung bestätigt. Das Diffe-enzenverfahren führt also zu einer besonders starken Konvergenz der Differenzeneigenwerte. Dies rechtfertigt die obige Überschrift.

Die Grenzwerte $\omega_{\mu\nu}$ verschwinden im allgemeinen nicht für $\mu \neq \nu$. Gemäß (58) ist

$$\omega_{\mu\nu} = (\lambda_\nu - \lambda_\mu) \cdot \int_a^b p\, y_\nu \frac{y_\mu (\lambda_\mu \cdot p + q)}{24\, r}\, dx.$$

Also ist $d_{\mu\nu}$ der Entwicklungskoeffizient der Funktion

$$\frac{y_\mu (\lambda_\mu p + q)}{24\, r}$$

bezüglich des Systems der Eigenfunktionen. Daraus ergibt sich ohne weiteres

$$\varphi_\mu = \frac{y_\mu (\lambda_\mu \cdot p + q)}{24\, r} - y_\mu \cdot \int_a^b p\, y_\mu'' \cdot \frac{\lambda_\mu p + q}{24\, r}\, dx.$$

Diese einfache Beziehung erlaubt eine wesentliche Verbesserung der Differenzeneigenlösung $F^{(n,\mu)}$. Wir setzen

$$\tilde{F}^{(n,\mu)} = F^{(n,\mu)} \left(1 - h^2 \cdot \frac{\Lambda_\mu^{(n)} p + q}{24\, r}\right).$$

Dann konvergiert die Folge

$$\frac{1}{h^2} (y_\mu^{(n)} - \tilde{F}^{(n,\mu)})$$

gegen die mit einem gewissen konstanten Faktor multiplizierte Eigen-unktion y_μ. Daraus ergibt sich, daß der Fehler, bis auf den $\tilde{F}^{(n,\mu)}$, ie entsprechende Polygonfunktion einer unnormierten Eigenfunktion pproximiert, auch nach Division durch h^2 gegen Null konvergiert. Man wird vermuten, daß der durch h^4 dividierte Fehler einer Grenz-unktion zustrebt. Da indes die Berechnung von Eigenfunktionen nicht ie gleiche Wichtigkeit wie die Berechnung von Eigenwerten besitzt, ehe ich von einer Überprüfung dieser Vermutung ab.

§ 15.
Das Korrekturverfahren.

Unter diesem Namen behandeln wir erneut das erste Beispiel de § 9, wonach

$$\sigma^{(n)} \equiv 0, \quad \xi^{(n)} \equiv 0, \quad \xi^{(n)} \equiv 0, \quad \tau = -\frac{r^2}{24} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)''$$

sein soll. Es empfiehlt sich, entweder $\tau^{(n)} \equiv \tau$ oder aber

$$\bar{r}_{i-1/2} = r_{i-1/2} - \frac{r_{i-1/2}^2}{6}\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{2}{r_{i-1/2}}\right)$$

zu setzen. Wir fanden bereits

$$\omega_{\mu\mu} = \int_a^b \frac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12\, r}\, y_\mu^2\, dx.$$

Hierfür können wir wegen des zweiten Mittelwertsatzes der Integral rechnung auch schreiben

$$\omega_{\mu\mu} = \left[\frac{(\lambda_\mu p + q)^2}{12 \cdot r\, p}\right]_{x=\bar{x}}$$

mit $\bar{x}$ als geeigneter Abszisse. Indem wir diese durch einen geschätzte Wert $\tilde{x}$ ersetzen, können wir näherungsweise

$$\lambda_\mu \approx \tilde{\Lambda}_\mu^{(n)} = \Lambda_\mu^{(n)} + h^2 \cdot \left|\frac{(\Lambda_\mu^{(n)} p + q)^2}{12\, r\, p}\right|_{x=\tilde{x}}$$

schreiben. Im allgemeinen wird die rechte Seite wesentlich näher a λ_μ herankommen als $\Lambda_\mu^{(n)}$ selbst. Besonders einfach ist die Berechnun der rechten Seite für $q \equiv 0$. Jetzt können wir

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}_\mu^{(n)} = \Lambda_\mu^{(n)} + \frac{h^2}{12} \cdot \Lambda_\mu^{(n)2} \cdot \left(\frac{p}{r}\right)_{x=\tilde{x}} \tag{81}$$

oder etwa

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}_\mu^{(n)} = \Lambda_\mu^{(n)} + \frac{h^2}{12} \cdot \Lambda_\mu^{(n)} \cdot \tilde{\tilde{\Lambda}}_\mu^{(n)} \cdot \left(\frac{p}{r}\right)_{x=\tilde{x}} \tag{82}$$

als verbesserten Wert nehmen. Wegen dieser einfachen Verbesserungs möglichkeit, die man beim numerischen Rechnen nicht unterlasse wird, habe ich in der Überschrift das Differenzenverfahren diese Paragraphen als Korrekturverfahren bezeichnet.

§ 16.
Numerische Beispiele.

Wir behandeln drei Beispiele Sturm-Liouvillescher Eigenwert probleme. Wir vergleichen dabei die Differenzeneigenwerte des normalen des starken und des Korrekturverfahrens miteinander. Zur besseren Übersicht setzen wir

$\Lambda_k^{(n)} = M_k^{(n}$ beim starken Verfahren
$\Lambda_k^{(n)} = N_k^{(n)}$ beim Korrekturverfahren
$\tilde{N}_k^{(n)}$ für die verbesserten Werte gemäß (81)
$\tilde{\tilde{N}}_k^{(n)}$ für die verbesserten Werte gemäß (82).

eim normalen Verfahren kennzeichnet $\Lambda_k^{(n)}$ die Differenzeneigenwerte.

1) $y'' + \lambda y = 0;\ a = 0,\ b = 1;\ \lambda_k = k^2 . \pi^2.$

ie Differenzengleichungen für das normale und das Korrekturverfahren
auten

$$\Delta\Delta F_{i-1} + h^2 . \Lambda^{n)} . F_i = 0.$$

s ist $\Lambda_k^{(n)} = N_k^{(n)} = \lambda_k \cdot \left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\right)^2;\ \vartheta = \frac{k}{2n}$. Beim starken Verfahren
etzen wir $\sigma^{(n)} \equiv \frac{1}{12}.\ \tau^{(n)} \equiv \xi^{(n)} \equiv \zeta^{(n)} \equiv 0$. Es gilt dann

$$M_k^{(n)} = \frac{\Lambda_k^{n)}}{1 - h^2 . \Lambda_k^{(n)}/12}$$

nd ferner mit Bezug auf das Korrekturverfahren

$$\tilde{N}_k^{(n)} = N_k^{(n)} + h^2 . N_k^{(n)2};\quad \tilde{\tilde{N}}_k^{(n)} = M_k^{(n)}.$$

s ergeben sich die folgenden Tabellen:

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	Kombinationen
	9,870			
$\Lambda_1^{(n)}$	8,000	9,000	9,372	$\Lambda_1^{(3)} + 0{,}8(\Lambda_1^{(3)} - \Lambda_1^{(2)}) = 9{,}800$
$N_1^{(n)}$	8,000	9,000	9,372	
$\tilde{N}_1^{(n)}$	9,333	9,750	9,829	
$\tilde{\tilde{N}}_1^{(n)}$	9,600	9,819	9,853	$M_1^{(3)} + \frac{16}{65}(M_1^{(3)} - M_1^{(2)}) = 9{,}873$
$M_1^{n)}$	9,600	9,819	9,853	
λ_2	39,478			
$\Lambda_2^{(n)}$	27,000	32,000		$\Lambda_2^{(4)} + \frac{9}{7}(\Lambda_2^{(4)} - \Lambda_2^{(3)}) = 33{,}429$
$N_2^{n)}$	27,000	32,000		
$\tilde{N}_2^{(n)}$	33,750	37,333		
$\tilde{\tilde{N}}_2^{(n)}$	36,000	38,400		$M_2^{(4)} + \frac{81}{175}(M_2^{(4)} - M_2^{(3)}) = 39{,}511$
$M_2^{(n)}$	36,000	38,400		
λ_3		88,826		
$\Lambda_3^{(4)}$		54,628		
$N_3^{(4)}$		54,628		
$\tilde{N}_3^{(4)}$		70,170		
$\tilde{\tilde{N}}_3^{(4)}$		76,349		
$M_3^{(4)}$		76,349		

2) $(e^{2x} y')' + \lambda . e^{2x} . y = 0;\ a = 0,\ b = 1.$

$y_k = e^{-x} . \sin \pi k x$ (unnormiert); $\lambda_k = 1 + k^2 . \pi^2.$

Die normalen Gleichungen lassen sich in der Form

$$e^h \cdot \Delta F_i - e^{-h} \cdot \Delta F_{i-1} + h^2 \cdot \Delta^{(n)} F_i = 0$$

schreiben. Wir setzen

$$\tau^{(n)} = -\frac{e^{2x}}{6}$$

beim Korrekturverfahren und

$$\xi^{(n)} \equiv 0, \quad \xi^{(n)} \equiv 0; \qquad \sigma^{(n)} \equiv \frac{e^{2x}}{12}, \quad \tau^{(n)} = -\frac{e^{2x}}{6}$$

beim starken Verfahren. Man erhält dann die Beziehungen

$$N_k^{(n)} = \left(1 - \frac{h^2}{6}\right) \Delta_k^{(n)}; \qquad \tilde{N}_k^{(n)} = N_k^{(n)} + \frac{h^2}{12} \cdot N_k^{(n)2}, \quad \tilde{\tilde{N}}_k^{(n)} = \frac{N_k^{(n)}}{1 - \frac{h^2}{12} \cdot N_k^{(n)}}$$

$$M_k^{(n)} = \frac{N_k^{(n)}}{1 - \frac{h^2}{12} \cdot \Delta_k^{(n)}}.$$

Es ergeben sich die Tabellen

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	Kombinationen
λ_1	10,870			
$\Delta_1^{(n)}$	9,021	9,824	10,377	$\Delta_1^{(3)} + 0{,}8 \cdot (\Delta_1^{(3)} - \Delta_1^{(2)}) = 10{,}799$
$N_1^{(n)}$	8,645	9,824	10,269	
$\tilde{N}_1^{(n)}$	10,202	10,718	10,818	
$\tilde{\tilde{N}}_1^{(n)}$	10,544	10,807	10,849	$M_1^{(3)} + \frac{16}{65}(M_1^{(3)} - M_1^{(2)}) = 10{,}873$
$M_1^{(n)}$	10,645	10,828	10,855	
λ_2	40,478			
$\Delta_2^{(n)}$	28,009	33,005		$\Delta_2^{(4)} + \frac{9}{7}(\Delta_2^{(4)} - \Delta_2^{(3)}) = 39{,}647$
$N_2^{(n)}$	27,491	32,661		
$\tilde{N}_2^{(n)}$	34,487	38,217		
$\tilde{\tilde{N}}_2^{(n)}$	36,876	39,355		$M_2^{(4)} + \frac{81}{175}(M_2^{(4)} - M_2^{(3)}) = 40{,}518$
$M_2^{(n)}$	37,115	39,441		

3) $(ry')' + \lambda r^2 \cdot y = 0$; $a = 0$, $b = 1$; $r = \frac{1}{1 - 2x + 2x^2}$.

Es ist $y_1 = x(1-x)$ (unnormiert); $\lambda_1 = 4$.

Wir setzen $\tau^{(n)} = -\frac{r^2}{6}$ für das Korrekturverfahren. Es ist $p/r =$
Als Mittelwert von p/r, wie er in der Verbesserung vorkommt, wähle
wir den Wert 1,5. — Das starke Verfahren setzen wir auf Grund de
Gleichungen

$$\sigma^{(n)} \equiv \frac{r^2}{12}, \quad \tau^{(n)} \equiv -\frac{r^2}{6}, \quad h^2 \cdot \xi_i^{(n)} = \frac{\Delta\Delta(r^2)_{i-1}}{48}; \qquad \zeta^{(n)} \equiv 0$$

n. Man erhält folgende Werte:

	$n=2$	$n=3$	Linearkombination
λ_1	4,000		
$A_1^{(n)}$	3,200	3,846	
$N_1^{(n)}$	2,987	3,747	
$\tilde{N}_1^{(n)}$	3,266	3,942	$A_1^{(3)} + 0{,}8(A_1^{(3)} - A_1^{(2)}) = 4{,}363$
$\hat{\tilde{N}}_1^{(n)}$	3,294	3,953	
$M_1^{(n)}$	3,461	4,002	

Sämtliche Beispiele lassen die günstige Wirkung des starken und es Korrekturverfahrens deutlich erkennen. Beim letzteren empfiehlt ich die Formel (82). Die Kombinationsmethode bringt bei den beiden rsten Beispielen verblüffende Verbesserungen. Beim dritten Beispiel st sie ohne Erfolg. Dennoch wird man sie im allgemeinen anwenden.

Das Differenzenverfahren ist an sich recht einfach. Dies zeigt sich uch bei den numerischen Rechnungen. Doch ging ihm bisher die Auffassung zur Seite, daß es nur grobe Näherungen liefere. Ich hoffe mit ieser Arbeit gezeigt zu haben, daß man es hinreichend genau machen ann, ohne seine Einfachheit zu gefährden.

(Eingegangen am 26. 1. 1946.)

Über Zerlegungen in n-te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen.

Von

R. Sprague in Berlin-Charlottenburg.

Zu Beginn der Zahlenreihe überwiegen für $n > 1$ die Fälle, in denen keine Zerlegung in n-te Potenzen von durchweg verschiedener Größe möglich ist.

Doch ist ihre Anzahl stets endlich:

Zu jedem n existiert eine Schranke g_n, oberhalb welcher jede Zahl als Summe von paarweis ungleichen n-ten Potenzen dargestellt werden kann.

Dieser Satz wird im folgenden bewiesen. —

Der Beweis beruht auf der Konstruktion einer von n abhängigen Zahl s_n oder kurz s, deren sämtliche Vielfache ms in der Form

$$c_1^n + c_2^n + \cdots \quad \text{mit} \quad 0 < c_1 < c_2 < \cdots$$

darstellbar sind.

Um diese Zerlegbarkeit der Vielfachen möglichst durchsichtig zu machen, werden für s selbst nicht weniger als $2^n - 1$ derartige Zerlegungen verlangt, nämlich (große lateinische Buchstaben bezeichnen Potenzsummen, kleine: natürliche Zahlen)

$$S_1, S_2, \ldots, S_{2^n-1}.$$

und die Gesamtheit der Summanden aller S_i soll überdies eine Menge n-ter Potenzen von lauter verschiedenen ungeraden Zahlen bilden.

Unter diesen Annahmen ergibt sich aus

$$m = t_0 + t_1 \cdot 2^n + t_2 \cdot 2^{2n} + t_3 \cdot 2^{3n} + \cdots \qquad 0 \leqq t_i < 2^n$$
$$(i = 0, 1, \ldots$$

zunächst

$$ms = t_0 s + t_1 s \cdot 2^n + t_2 s \cdot 2^{2n} + \cdots$$

und, wenn für die von Null verschiedenen $t_i s$ die Potenzsummen

$$T_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_{t_i}$$

eingesetzt werden, in

$$ms = T_0 + T_1 \cdot 2^n + T_2 \cdot 2^{2n} + \cdots$$

eine Darstellung der behaupteten Art.

Denn nach den Voraussetzungen über die S_i enthält kein T_i zwei gleiche Glieder (dies Wort bleibe auf n-te Potenzen beschränkt) und die Glieder von $T_i \cdot 2^{in}$ und $T_k \cdot 2^{kn}$ unterscheiden sich für $i \neq k$ eben durch das verschieden häufige Auftreten des Primfaktors 2. —

Zur Konstruktion einer solchen Zahl s dient jede Identität in x on der Gestalt

$$(x+a_1)^n+\cdots+(x+a_p)^n \equiv (x+a_{p+1})^n+\cdots+(x+a_{2p})^n \tag{1}$$
$$0<a_i;\quad a_i \neq a_k,\ i \neq k\ (i,k=1,2,\ldots,2p).$$

lier darf

$$a_i \equiv 1 \pmod 2 \qquad (i=1,2,\ldots,2p)$$

ngenommen werden; sonst bewirkt dies die Substitution

$$x=\frac{\bar{x}+1}{2}.$$

lit (1) gilt für jedes d

$$(x+a_1+d)^n+\cdots+(x+a_p+d)^n \equiv (x+a_{p+1}+d)^n+\cdots+(x+a_{2p}+d)^n.$$

lierin sollen nun der Größe d gewisse Werte

$$d_i \geqq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

rteilt werden. Die linken und rechten Seiten der betreffenden Gleichungen mögen L_i und R_i heißen:

$$\begin{aligned} L_i &\equiv (x+a_1+d_i)^n+\cdots+(x+a_p+d_i)^n \\ R_i &\equiv (x+a_{p+1}+d_i)^n+\cdots+(x+a_{2p}+d_i)^n. \end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

edes der 2^n Produkte

$$L_1 L_2 \ldots L_{n-1} L_n,\ L_1 L_2 \ldots L_{n-1} R_n,\ \ldots,\ R_1 R_2 \ldots R_n \tag{2}$$

tellt eine Summe von p^n Gliedern der Form

$$[(x+a_{k_1}+d_1)\ldots(x+a_{k_n}+d_n)]^n \qquad (1 \leqq k_\nu \leqq 2p) \tag{3}$$

ar.

Genügen die d_i den Bedingungen

$$\begin{aligned} d_i &\equiv 0 \pmod 2 \qquad \begin{pmatrix} i,j=1,2,\ldots,n \\ k,l=1,2,\ldots,2p \end{pmatrix}, \\ a_k+d_i &\neq a_l+d_j \text{ für } i \neq j \end{aligned}$$

o ergeben alle $(2p)^n$ Ausdrücke (3) bei geradem x einen ungeraden Wert und kein Paar von ihnen ist identisch gleich. Daher existiert ine kleinste nicht-negative gerade Zahl, die, für x eingesetzt, diese ämtlichen $(2p)^n$ Glieder von (2) zu paarweis verschiedenen ungeraden Zahlen macht.

In (2) liegen dann 2^n Zerlegungen ein und derselben Zahl vor mit len für die Zerlegungen von s geforderten Eigenschaften. Also darf. nit diesem Wert von x in $L_1 L_2 \ldots L_n$,

$$s = L_1 L_2 \ldots L_n$$

esetzt werden. —

Die Gültigkeit von (1) ist, wie Koeffizientenvergleichung lehrt, gleichbedeutend mit der Gültigkeit des Systems von n Gleichungen

$$a_1^k+\cdots+a_p^k = a_{p+1}^k+\cdots+a_{2p}^k, \qquad k=1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Da nun aus

$$a_1^k+\cdots+a_l^k = a_{l+1}^k+\cdots+a_{2l}^k, \qquad k=1,2,\ldots,\nu \tag{6}$$

unmittelbar, identisch in h_ν,

$$(7)\qquad \left.\begin{aligned} &a_1^k+\cdots+a_l^k+\\ &+(a_{l+1}+h_\nu)^k+\cdots+(a_{2l}+h_\nu)^k \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &a_{l+1}^k+\cdots+a_{2l}^k+\\ &+(a_1+h_\nu)^k+\cdots+(a_l+h_\nu)^k. \end{aligned}\right.$$
$$k = 1, 2, \ldots, \nu, \nu+1$$

folgt, gewinnt man ein Beispiel für (5) auf bekannte[1]), höchst einfache Weise.

Man geht etwa aus von

$$1^k+7^k = 3^k+5^k, \qquad k = 1$$

und wählt

$$h_i = 2^{i+2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1$$

für den iterierten Übergang von (6) nach (7).

Der $(n-1)$-te Schritt führt zu einem System wie (5) mit $p = 2^n$ und zwar sind die a_i die ungeraden Zahlen von 1 bis $2^{n+2}-1$ in dieser Verteilung: stellt man sie dyadisch dar, so gehören zur linken Seite L_1 genau diejenigen mit ungerader Quersumme, zu R_1 die mit gerader. Hiernach gilt die Zahl

$$s_n = L_1 L_2 \ldots L_n$$

als bestimmt; sie ist zugleich mit p gerade. —

Schließlich sei z eine nicht durch s_n teilbare Zahl,

$$z \equiv r \,(\mathrm{mod.}\ s_n), \quad 0 < r \lessgtr s_n - 1.$$

Subtrahiert man von z die ersten r der s_n-1 Zahlen

$$(8)\qquad (s_n+1)^n,\ (2s_n+1)^n,\ \ldots,\ ((s_n-1)\cdot s_n+1)^n,$$

so ergibt sich ein Vielfaches $m s_n$ von s_n und

$$m s_n + (s_n+1)^n + \cdots + (r s_n+1)^n$$

stellt wegen der Zerlegbarkeit von $m s_n$ jedenfalls eine Zerlegung von z in n-te Potenzen dar, wenn $m \geqq 0$ ausfällt.

Nun greifen die Voraussetzungen über s_n noch einmal ein. Die Zahlen (8) sind sämtlich größer als s_n und ungerade. Das erste Merkmal unterscheidet sie von den ungeraden, das zweite von den geraden Gliedern in der Zerlegung für $m s_n$.

Daher ist z in lauter verschiedene n-te Potenzen zerlegbar, sofern die Subtraktion aller Zahlen (8) möglich, d. h.

$$z \geqq (s_n+1)^n + (2s_n+1)^n + \cdots + ((s_n-1)s_n+1)^n$$

ist.

Also hat die Schranke

$$g_n = s_n^{2n+1}$$

gewiß die behauptete Beschaffenheit.

[1]) Dickson-Bodewig, Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig u. Berlin 193 (B. G. Teubner). 4. Kap., besonders § 32—35.

(Eingegangen am 29. Januar 1947.)

Neuer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung von Bol[1]).

Von

A. Dinghas in Berlin.

1. In der vorliegenden Note soll die zuerst von Bol[2]) bewiesene Ungleichung

(1.1) $$L^2 - 4\,F^* F \geqq 0.$$

welche die Länge L einer konvexen Kurve mit dem von ihr eingeschlossenen Inhalt F und dem Inhalt F^* des ihr zugeordneten „Kappenbereichs" verbindet, mit Hilfe des Wirtingerschen Lemmas bewiesen werden. Dadurch wird (1.1) in diejenige Reihe von isoperimetrischen Ungleichungen eingeordnet, welche durch alte „klassische" Hilfsmittel bewiesen werden können.

Zum Schluß der Arbeit wird noch mittels ähnlicher Schlüsse eine lineare isoperimetrische Ungleichung bewiesen, welche die bekannte lineare isoperimetrische Ungleichung verallgemeinert.

2. **Das Wirtingersche Lemma.** Damit der Leser alles beisammen haben möge, sei hier das Wirtingersche Lemma mit kurzem Beweis angeführt. Dieses Lemma besagt[3]):

Ist $y = y(x)$ eine für alle x definierte eindeutige, stetige Funktion von x, mit der Periode 2π, deren Ableitung y' im Lebesgueschen Sinne quadratintegrierbar ist, und gilt ferner

(2.1) $$\int_0^{2\pi} y\,dx = 0.$$

so ist

---

[1]) Vorgetragen u. a. in der Universität Greifswald am 3. 12. 1943.

[2]) Bol, G., Ein isoperimetrisches Problem. Nieuw Archief voor Wiskunde **20** (1940) S. 171–175.

Vgl. auch Dinghas, Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Bereiche mit Ecken, Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 428—440 und Über die lineare isoperimetrische Ungleichung für konvexe Polygone und Kurven mit Ecken. Monatsh. f. Math. u. Physik.

[3]) Vgl. Blaschke, Kreis und Kugel, Teubner, Leipzig 1916. Der Beweis, der hier gegeben wird, geht auf eine Arbeit des Verf. zurück: Zur isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Kurven. Revue Union Math. interbalkanique. Bd. 3, Fasc. 3—4, 1940.

$$I(y) = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)\, dx \geqq 0, \tag{2.2}$$

und das Gleichheitszeichen tritt nur für

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \tag{2.3}$$

mit beliebigen Konstanten C_1, C_2 ein.

Zum Beweis verfahren wir folgendermaßen: Erstens ist, wie man leicht feststellt, $I(y) = I(y - a\cos x)$ für jede Konstante a. Zweitens gibt es mindestens ein q so, daß

$$y(q) + y(\pi + q) = 0$$

wird. Dies folgt aus der Tatsache, daß wegen (2.1) die Funktion $y(x) + y(x+\pi)$ in $0 \leqq x < \pi$ mindestens eine Nullstelle besitzen muß. Setzt man dann $a = y(q)$, so verschwindet die Funktion

$$Y(x) = y(x) - y(q)\cos(x-q) = y - a\cos(x-q)$$

bei $x = q$ und $x = \pi + q$.

Da nun jetzt die Identität gilt

$$Y'^2 - Y^2 - (Y' - Y\operatorname{cotg}(x-q))^2 = \frac{d}{dx}(Y^2 \operatorname{cotg}(x-q)) \tag{2.4}$$

und, wie man leicht feststellt, in der Umgebung von $x = q$ bzw. $x = \pi + q$

$$Y = o(\sqrt{|x-q|}) \quad \text{bzw.} \quad Y = o(\sqrt{|\pi - x + q|})$$

ist, so erhält man aus (2.4) durch Integration und Berücksichtigung von $I(Y) = I(y)$ die gewünschte Identität

$$I(y) = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)\, dx = \int_0^{2\pi} (Y' - Y\cot(x-q))^2\, dx = R(y) \geqq 0 \tag{2.5}$$

woraus (2.2) unmittelbar folgt.

Daß das Gleichheitszeichen hier nur für (2.3) eintritt, ist trivial und folgt mit Rücksicht auf die Stetigkeit in y und (2.1) unmittelbar aus (2.5).

3. **Der zugeordnete Kappenbereich und die Ungleichung von Bol.** Liegt jetzt in einer Ebene E ein konvexer Bereich $\mathfrak{K}$ vor, der von einer Kurve C begrenzt wird, so definieren wir den zugeordneten Kappenbereich $\mathfrak{K}^*$ als denjenigen Bereich, den man erhält, indem man an einen Einheitskreis von E um den Nullpunkt alle Tangenten T parallel zu den Eckentangenten von $\mathfrak{K}$ legt und dann den von diesen Tangenten T eingeschlossenen konvexen Bereich nimmt.

Wir bezeichnen jetzt mit p bzw. p^* die Stützfunktionen von C bzw. des Randes C^* von $\mathfrak{K}^*$ und mit L bzw. L^* ihre Längen. Bilden wir dann die Funktion

$$y = \frac{p(\varphi)}{L} - \frac{p^*(\varphi)}{L^*}, \tag{3.1}$$

so genügt diese als Funktion des „Stützwinkels" φ den Bedingungen des Wirtingerschen Lemmas und wir erhalten durch Einsetzen, mi

ücksicht auf die bekannten Formeln für den Inhalt F von $\mathfrak{K}$ und
* von $\mathfrak{K}^*$.

.2) $$\frac{F}{L^2} - \frac{A}{LL^*} + \frac{F^*}{L^{*2}} = -\frac{1}{2} R(y) \leqq 0,$$

it

.3) $$A = \int_0^{2\pi} (p\,p^* - p'\,p^{*\prime})\,d\varphi.$$

ier könnten wir sogar das Integral als ein Integral im RIEMANNschen
nne nehmen, wenn man die klassischen Ergebnisse BLASCHKEsches
ber die Stützfunktion eines konvexen Bereiches berücksichtigt[4]).

Wir beweisen jetzt: Die Größe A ist gleich der Länge L von C.
Dazu genügt zu zeigen, daß, falls J ein von zwei „Kappentangenten"
ig. 1) begrenztes Intervall der Einheitsperipherie bedeutet, die
leichung

.4) $$A(J) = \int_J (p\,p^* - p'\,p'^*)\,d\varphi = \int_J p\,d\varphi$$

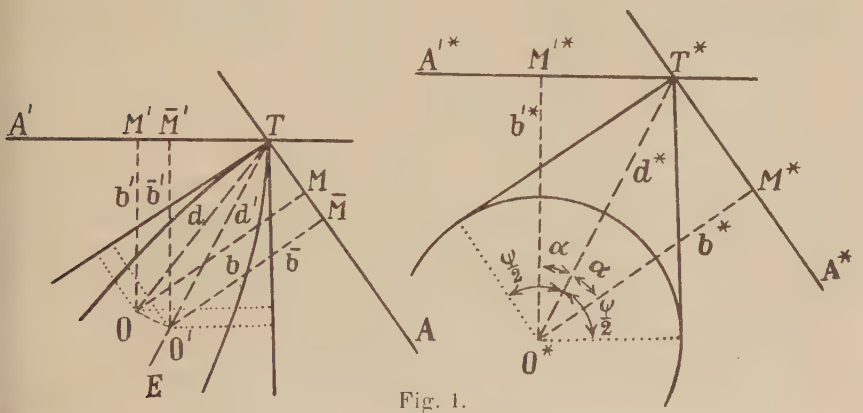

Fig. 1.

ilt. Denn außerhalb der Intervalle J ist $p^* = 1$ und wegen der Voll-
litivität des LEBESGUEschen Integrals ist dann die Behauptung wahr.

Daß (3.4) richtig ist, kann man sich am besten durch nachfolgende
nordnung der Integration überzeugen:

Man fasse immer zwei in Bezug auf die Richtung O^*T^* (Fig. 1)
mmetrisch liegenden Stützgeraden, z. B. A, A' und ihre entsprechenden
*, $A^{*\prime}$ zusammen und bezeichne mit b, b' bzw. $b^*, b^{*\prime}$ die entsprechenden
erte der Stützfunktionen. Da allgemein, wie man leicht nachrechnet,
p'^* gleich dem inneren Produkt der Vektoren $\overrightarrow{MT}$, M^*T^* ist, so ist

$$A(J) = \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \{(b + b')\,b^* - (a + a')\,a^*\}\,d\alpha,$$

[4]) BLASCHKE, W., Beweise zu Sätzen von BRUNN und MINKOWSKI über die Minimal
genschaft des Kreises. Jahresber. D. M. V., Bd. 23 (1914). S. 210—234.

wobei $a^* = T^* M^*$ ist, und $a = (TM)$, $a' = (TM)'$ die inneren Produkte von $\overrightarrow{MT}$ bzw. $\overrightarrow{M'T}$ mit zwei zu $\overrightarrow{M^*T^*}$ bzw. $\overrightarrow{M'^*T^*}$ äquipollenten Einheitsvektoren bedeuten. Projiziert man O der ohne Einschränkung der Allgemeinheit innerhalb C genommen werden kann auf die Richtung TE parallel zu T^*O^* und setzt man $TO' = d'$, so wird wegen $b + b' = 2O'\overline{M} = 2d' \cos\alpha$ und der leicht beweisbaren Gleichung $a + a' = 2T\overline{M} = 2d' \sin\alpha$

$$A(J) = 2d'd^* \int_0^{\frac{\psi}{2}} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\, d\alpha = 2d^* d' \sin\frac{\psi}{2} \cos\frac{\psi}{2} = 2d' \sin\frac{\psi}{2}.$$

Nun ist aber

$$\int_J p\, d\varphi = \int_J \{b + b'\}\, d\alpha = 2d' \int_0^{\frac{\psi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha = 2d' \sin\frac{\psi}{2}.$$

Es gilt also in der Tat (3.4) und somit ist erwiesen, daß $A = L$ ist.

Ersetzt man jetzt in (3.2) A durch L und beachtet man die Gleichung $L^* = 2F^*$, so findet man

$$\frac{F}{L^2} - \frac{1}{4F^*} = -\frac{1}{2} R(y)$$

oder

$$4FF^* - L^2 = -2L^2 F^* R(y) \leqq 0,$$

d. h. die Bolsche Ungleichung. Die Gleichheit tritt hier nur dann ein, wenn $R(y) = 0$ ist, also wenn $\frac{p}{L} - \frac{p^*}{L} = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi$ ist. Das bedeutet aber, daß C und C^* homothetisch sind.

4. **Nochmals die lineare isoperimetrische Ungleichung.** Zum Schluß wollen wir noch eine lineare isoperimetrische Ungleichung beweisen, die eine Ungleichung verallgemeinert, die ich in meiner in der Einleitung zitierten Arbeit bewiesen habe. Dazu betrachten wir wieder die konvexe Kurve C und konstruieren an den Einheitskreis $\mathfrak{K}$ den zugeordneten Kappenbereich C^* (Fig. 2). Es seien $2d$ bzw. $2d^*$ (in der Figur irrtümlich durch α, α^* bezeichnet) die Breiten von C bzw. C^* in einer Richtung (z. B. $\varphi = 0$), d. h. die Entfernung zweier paralleler Stützgeraden. Wir wählen den Nullpunkt O für die Kurve C in einer Entfernung a_1 bzw. a_2 von den Stütz-

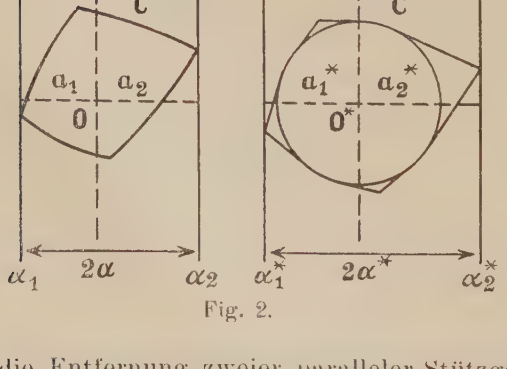

Fig. 2.

raden α_1, α_2 von C, indem wir diese Größen mittels der Gleichungen

$$\frac{a_1}{a_1^*} = \frac{a_2}{a_2^*}, \quad a_1 + a_2 = 2d$$

stimmen. Die a_1^*, a_2^* sind eindeutig bestimmt, wenn man als O^* den ttelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}$ wählt. Man findet dann

$$a_1 = a_1^* \frac{d}{d^*}, \quad a_2 = a_2^* \frac{d}{d^*}.$$

n genügt die Funktion $y = p - \frac{d}{d^*} p^*$ der Identität (2.5), da ja rt nur die Eigenschaft von y verwendet wurde, indem sie nämlich i $x = q$ (hier ist $q = 0$) und $x = q + \pi$ verschwindet.

Durch Anwendung von (2.5) auf diese Funktion erhalten wir dann ch einigen Rechnungen die gesuchte Ungleichung

1) $$F d^{*2} - L d d^* + F^* d^2 \leqq 0.$$

aß aus dieser Ungleichung die Bolsche Ungleichung (1.1) folgt, ist vial und bedarf wohl keiner besonderen Erwähnung. Wann steht er in (4.1) das Gleichheitszeichen? Ist $d^* = 1$, so sind die Fälle, r die das der Fall ist, bereits in meiner zitierten Arbeit untersucht. $d^* > 1$, so hat C entweder eine Ecke, die auf α oder α' liegt, oder vei Ecken, die auf α bzw. α' liegen. In beiden Fällen kann man, e dies aus dem Wirtingerschen Lemma in Verbindung mit diesen oraussetzungen hervorgeht, nur dann eintreten, wenn C mit C^* (bis lf Ähnlichkeit) übereinstimmt, d. h. wenn der von C umschlossene ereich $\mathfrak{K}$ Kappenbereich eines Kreises ist.

(Eingegangen am 5. Februar 1947.)

Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung.

Von

M. Müller in Tübingen.

L. Euler hat in den Fällen $k = 2, 3$ und 4 bewiesen, daß für reelle positives r die Lösungen des Systemes linearer Differenzengleichunge

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{1,n+1} = a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \cdots + a_{k-1,n} + a_{kn} \\ a_{2,n+1} = r\,a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \cdots + a_{k-1,n} + a_{kn} \\ a_{3,n+1} = r\,a_{1n} + r\,a_{2n} + a_{3n} + \cdots + a_{k-1,n} + a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k,n+1} = r\,a_{1n} + r\,a_{2n} + r\,a_{3n} + \cdots + r\,a_{k-1,n} + a_{kn} \end{cases}$$

bei fast beliebiger Wahl der Ausgangswerte $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{k0}$ die Be ziehungen

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{r},\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{3n}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{r^2},\ \ldots,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{kn}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{r^{k-1}}$$

erfüllen [1]). Für den allgemeinen Fall eines beliebigen k hat Herr M. Krafft einen Beweis gegeben [2]), bei dem wie bei Euler das System (1) zu nächst durch eine Differenzengleichung k-ter Ordnung ersetzt wird Herr Krafft kommt mittels begrifflicher Schlüsse sehr rasch zu eine Bestätigung der Beziehungen (2) unter der Voraussetzung, daß di Ausgangswerte nicht negativ und nicht alle gleich Null sind.

Der Beweis, den wir in dieser Arbeit geben, ist länger; er führ aber ohne den Umweg über eine lineare Differenzengleichung k-te Ordnung zu einer expliziten Darstellung der Zahlen $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{k}$ die einen tieferen Einblick in die Konvergenzverhältnisse ermöglich

---

[1]) L. Euler. De inventione quotcumque mediarum proportionalium citra radicu extractionem. Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **14** (1769 I 1770, p. 188—214. (= L. Euleri Opera omnia (1), **6**. p. 240—262.) Vgl. auch W. Lore Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung. Monatshefte f. Math. u Phys. **48** (1939), S. 190—197.

[2]) M. Krafft, Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung. Monat hefte f. Math. und Phys. **49** (1941), S. 312—315.

ußerdem ersetzen wir das System (1) durch das etwas allgemeinere
stem

$$\begin{cases} a_{1,n+1} = a_{1n} + p\,a_{2n} + p\,a_{3n} + \cdots + p\,a_{k-1,n} + p\,a_{kn} \\ a_{2,n+1} = q\,a_{1n} + a_{2n} + p\,a_{3n} + \cdots + p\,a_{k-1,n} + p\,a_{kn} \\ a_{3,n+1} = q\,a_{1n} + q\,a_{2n} + a_{3n} + \cdots + p\,a_{k-1,n} + p\,a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k,n+1} = q\,a_{1n} + q\,a_{2n} + q\,a_{3n} + \cdots + q\,a_{k-1,n} + a_{kn}, \end{cases}$$

) p und $q = pr$ positive reelle Zahlen sein sollen, durch deren eignete Wahl sich die Konvergenz des Eulerschen Verfahrens ver-ssern läßt.

Wenn $p = q$ und damit $r = 1$ ist, leuchtet die Eulersche Be-uptung unmittelbar ein. Wir können also von vornherein annehmen, ß $p \neq q$ und damit $r \neq 1$ ist.

§ 1.

Lösung des Differenzengleichungssystemes (3).

1. Soll der Ansatz

$$a_{1n} = C_1\alpha^n, \ldots, a_{kn} = C_k\alpha^n$$

einer nichttrivialen Lösung des Systemes (3) führen, so müssen die hlen $C_1, \ldots, C_k$ eine nichttriviale Lösung des Systemes

$$\begin{aligned} \xi C_1 + p C_2 + \cdots + p C_{k-1} + p C_k &= 0 \\ q C_1 + \xi C_2 + \cdots + p C_{k-1} + p C_k &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ q C_1 + q C_2 + \cdots + q C_{k-1} + \xi C_k &= 0 \end{aligned}$$

in, wo

$$1 - \alpha = \xi$$

setzt wurde. Es muß also für ξ eine Nullstelle der Determinante

$$D_k(x) = \begin{vmatrix} x & p & p & \ldots & p & p \\ q & x & p & \ldots & p & p \\ q & q & x & \ldots & p & p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q & q & q & \ldots & q & x \end{vmatrix}$$

wählt werden.

$D_k(x)$ ist ein Polynom k-ten Grades in x, das sich leicht berechnen 3t. Ist $pq = 0$, so ist $D_k(x) = x^k$. Ist $pq \neq 0$, so kann man in der terminante $D_k(x)$ die mit $\frac{q}{p}$ multiplizierten Elemente der letzten

Spalte in der ersten Spalte subtrahieren und dann nach den Elemente der ersten Spalte entwickeln; dabei ergibt sich

$$D_k(x) = (x-q)\,D_{k-1}(x) + (-1)^{k+1}\left(q - \frac{q}{p}x\right)\begin{vmatrix} p & p & \dots & p & p \\ x & p & \dots & p & p \\ q & x & \dots & p & p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q & q & \dots & x & p \end{vmatrix}.$$

Subtrahiert man in der noch übrig gebliebenen $(k-1)$-reihigen Determinante die Elemente der letzten Spalte in allen vorangehenden Spalten und entwickelt man dann nach den Elementen der ersten Zeile, so ergibt sich nach leichter Umrechnung die Rekursionsformel

$$D_k(x) = (x-q)\,D_{k-1}(x) + q(x-p)^{k-1}. \tag{7}$$

Hiernach ist

$$D_\varkappa(x) = (x-q)\,D_{\varkappa-1}(x) + q(x-p)^{\varkappa-1} \quad (\varkappa = 3, 4, \dots, k$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(x-q)^{k-\varkappa}$ und summiert dann über $\varkappa$ von 3 bis k, so entsteht die Formel

$$D_k(x) = (x-q)^{k-2}\,D_2(x) + q(x-p)^2\,[(x-p)^{k-3} + (x-p)^{k-4}(x-q) + \dots + (x-q)^{k-3}]. \tag{8}$$

Dabei ist nach (6)

$$D_2(x) = x^2 - pq. \tag{9}$$

Ist $p = q$, so wird

$$\begin{aligned} D_k(x) &= (x-p)^{k-2}(x^2-p^2) + (k-2)\,p(x-p)^{k-1} \\ &= (x + (k-1)\,p)\,(x-p)^{k-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Ist $p \neq q$, so wird

$$D_k(x) = (x-q)^{k-2}(x^2 - pq) + q(x-p)^2\,\frac{(x-p)^{k-2} - (x-q)^{k-2}}{q-p}$$

und nach leichter Umformung

$$D_k(x) = \frac{p}{p-q}(x-q)^k + \frac{q}{q-p}(x-p)^k. \tag{11}$$

2. Ist $pq = 0$, so hat $D_k(x)$ die k-fache Nullstelle $\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_{k-1} = 0$. Ist $p = q \neq 0$, so hat $D_k(x)$ die Nullstellen $\xi_0 = -(k-1)p$, $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{k-1} = p$. Nun sei $pq \neq 0$, $p \neq q$ und ξ eine Nullstelle von $D_k(x)$. Da

$$D_k(p) = p(p-q)^{k-1} \neq 0, \quad D_k(q) = q(q-p)^{k-1} \neq 0.$$

ist $\xi \neq p$ und $\xi \neq q$. Aus der Gleichung

$$\frac{p}{p-q}(\xi-q)^k + \frac{q}{q-p}(\xi-p)^k = 0$$

folgt also, daß

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{\xi-p}{\xi-q}\right)^k = 0.$$

Wird

12) $$\tau = \frac{\xi - p}{\xi - q}$$

gesetzt, so ist also

$$\tau^k - \frac{p}{q} = 0.$$

d. h.

13) $$\tau = \sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon,$$

wo ε eine k-te Einheitswurzel bedeutet. Aus (12) und (13) folgt, daß

14) $$\xi = \frac{p - q\tau}{1 - \tau} = \frac{p - q\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon}{1 - \sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon}.$$

Den k verschiedenen k-ten Einheitswurzeln $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ entsprechen k verschiedene Zahlen

15) $$\tau_\varkappa = \sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1),$$

diesen k verschiedene Zahlen

16) $$\xi_\varkappa = \frac{p - q\tau_\varkappa}{1 - \tau_\varkappa} = \frac{p - q\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa}{1 - \sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1),$$

diesen k verschiedene Zahlen

17) $$\alpha_\varkappa = 1 - \xi_\varkappa = \frac{1 - p - (1-q)\tau_\varkappa}{1 - \tau_\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1).$$

3. Zur Vorbereitung der Ermittlung der Zahlen $C_1, \ldots, C_k$ berechnen wir jetzt die algebraischen Komplemente der Elemente der letzten Zeile der Determinante $D_k(x)$, die wir von links nach rechts mit $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_k(x)$ bezeichnen.

Zunächst ist

18) $$A_k(x) = D_{k-1}(x).$$

Weiter ist

$$A_1(x) = (-1)^{k+1}\begin{vmatrix} p & p & \ldots & p & p \\ x & p & \ldots & p & p \\ q & x & \ldots & p & p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q & q & \ldots & x & p \end{vmatrix} = (-1)^{k+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ x-p & 0 & \ldots & 0 & p \\ q-p & x-p & \ldots & 0 & p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q-p & q-p & \ldots & x-p & p \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k+1}(-1)^k p(x-p)^{k-2},$$

d. h.

19) $$A_1(x) = -p(x-p)^{k-2}.$$

Nun sei $2 \leqq \varkappa \leqq k-1$. Dann ist, wenn wir die $(\varkappa-1)$-te, $\varkappa$-te und $(\varkappa+1)$-te Spalte und die $(\varkappa-1)$-te, $\varkappa$-te, $(\varkappa+1)$-te und $(\varkappa+2)$-te Zeile ausführlicher andeuten,

$$A_\varkappa(x) = (-1)^{k+\varkappa} \begin{vmatrix} x & p & \dots & p & p & p & \dots & p & p & p \\ q & x & \dots & p & p & p & \dots & p & p & p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q & q & \dots & x & p & p & \dots & p & p & p \\ q & q & \dots & q & p & p & \dots & p & p & p \\ q & q & \dots & q & x & p & \dots & p & p & p \\ q & q & \dots & q & q & x & \dots & p & p & p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q & q & \dots & q & q & q & \dots & x & p & p \\ q & q & \dots & q & q & q & \dots & q & x & p \end{vmatrix};$$

subtrahiert man die Elemente der letzten Spalte in allen anderen Spalten und nach dieser Umformung die Elemente der ersten Zeile in allen übrigen Zeilen, so wird

$$A_\varkappa(x) = (-1)^{k+\varkappa} \begin{vmatrix} x-p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p \\ q-x & x-p & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q-x & q-p & \dots & x-p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q-x & q-p & \dots & q-p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q-x & q-p & \dots & q-p & x-p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q-x & q-p & \dots & q-p & q-p & x-p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q-x & q-p & \dots & q-p & q-p & q-p & \dots & x-p & 0 & 0 \\ q-x & q-p & \dots & q-p & q-p & q-p & \dots & q-p & x-p & 0 \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man, den Laplaceschen Entwicklungssatz anwendend, nach den Minoren der $k \cdot (\varkappa-1) = k-\varkappa$ letzten Spalten, so ergibt sich, daß

$$A_\varkappa(x) = (-1)^{k+\varkappa} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p \\ x-p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q-p & x-p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q-p & q-p & \dots & x-p & 0 & 0 \\ q-p & q-p & \dots & q-p & x-p & 0 \end{vmatrix} \times \tag{20}$$

$$\times(-1)^J \begin{vmatrix} q-x & x-p & 0 & \dots & 0 \\ q-x & q-p & x-p & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q-x & q-p & q-p & \dots & x-p \\ q-x & q-p & q-p & \dots & q-p \end{vmatrix},$$

obei

$$\begin{aligned} J &= [1+(\varkappa+1)+\cdots+(k-1)]+[\varkappa+(\varkappa+1)+\cdots+(k-1)] \\ &= 1+\varkappa+2\,[(\varkappa+1)+\cdots+(k-1)]. \end{aligned}$$

e erste Determinante, die in (20) auftritt, hat den Wert

$$(-1)^{k-\varkappa+1}\,p\,(x-p)^{k-\varkappa-1}.$$

e zweite Determinante formen wir um, indem wir die Elemente der rletzten Zeile in der letzten Zeile, dann die Elemente der drittletzten ile in der vorletzten Zeile, schließlich die Elemente der ersten Zeile der zweiten Zeile subtrahieren. Dadurch werden die Elemente in der auptdiagonale alle gleich $q-x$, die Elemente unterhalb der Hauptagonalen alle gleich 0. Diese zweite Determinante hat also, weil sie $-1-(k-\varkappa) = \varkappa-1$ Reihen hat, den Wert

$$(q-x)^{\varkappa-1}.$$

e Zusammenfassung dieser Teilergebnisse zeigt, daß

1) $$A_\varkappa(x) = -p\,(x-p)^{k-\varkappa-1}\,(x-q)^{\varkappa-1}.$$

Nachträglich gilt diese Formel, wie ein Blick auf (19) lehrt, auch ch für $\varkappa = 1$; sie gilt also für $\varkappa = 1, 2, \dots, k-1$.

4. Im Hinblick auf die geplante Anwendung können wir jetzt vorssetzen, daß p und q von 0 und untereinander verschieden sind. nn gilt für jede Nullstelle ξ von $D_k(x)$ die Formel (14) und für jedes $\geqq 1$ die Formel (11). Nach (14) und (21) ist

$$A_\varkappa(\xi) = -p\left(\frac{p-q}{1-\tau}\right)^{k-2}\tau^{k-\varkappa-1} \quad (\varkappa = 1, 2, \dots, k-1)$$

d nach (18), (11) und (14)

$$A_k(\xi) = \left(\frac{p-q}{1-\tau}\right)^{k-2}\frac{p-q\,\tau^{k-1}}{1-\tau} = -p\left(\frac{p-q}{1-\tau}\right)^{k-2}\tau^{-1},$$

e eine leichte Umformung ergibt. Es gilt also ausnahmslos die Formel

2) $$A_\varkappa(\xi) = -p\left(\frac{p-q}{1-\tau}\right)^{k-2}\tau^{-1}\tau^{k-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots, k).$$

Diese k Zahlen $A_\varkappa(\xi)$ sind alle von Null verschieden. Daher ergeben h die Lösungen $C_1, C_2, \dots, C_k$ des Gleichungssystemes (4) aus der öportion

$$C_1 : C_2 : \dots : C_k = A_1(\xi) : A_2(\xi) : \dots : A_k(\xi).$$

Da wir über den Proportionalitätsfaktor frei verfügen dürfen, kann

$$C_\varkappa = \tau^{k-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k \tag{23}$$

gesetzt werden.

Die Zahlen

$$a_{1n} = \tau^{k-1}\alpha^n, \quad a_{2n} = \tau^{k-2}\alpha^n, \quad \ldots, \quad a_{kn} = \alpha^n$$

bilden dann bei jeder Wahl der Einheitswurzel ε eine Lösung des Differenzengleichungssystemes (3) für $n \geqq 1$. Dasselbe gilt allgemeiner von den Ausdrücken

$$a_{1n} = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \gamma_\varkappa \tau_\varkappa^{k-1} \alpha_\varkappa^n, \quad a_{2n} = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \gamma_\varkappa \tau_\varkappa^{k-2} \alpha_\varkappa^n, \quad \ldots, \quad a_{kn} = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \gamma_\varkappa \alpha_\varkappa^n \tag{24}$$

bei beliebiger Wahl der Konstanten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$.

5. Wir haben jetzt diese Konstanten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ den vorgeschriebenen Anfangswerten $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{k0}$ anzupassen. Dabei setzen wir zunächst voraus, daß keine der Zahlen $\alpha_\varkappa$ gleich Null ist, so daß die Formeln (24) auch für $n = 0$ einen bestimmten Sinn haben. Nach (24) und (15) muß

$$\begin{cases} \gamma_0 \varepsilon_0^{k-1} + \gamma_1 \varepsilon_1^{k-1} + \cdots + \gamma_{k-1} \varepsilon_{k-1}^{k-1} = a_{10} \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{k-1} \\ \gamma_0 \varepsilon_0^{k-2} + \gamma_1 \varepsilon_1^{k-2} + \cdots + \gamma_{k-1} \varepsilon_{k-1}^{k-2} = a_{20} \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{k-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k-1} = a_{k0} \end{cases} \tag{25}$$

werden.

Bezeichnet man das algebraische Komplement von $\varepsilon_\varkappa^{k-\lambda}$ in der Determinante

$$E = \begin{vmatrix} \varepsilon_0^{k-1} & \varepsilon_1^{k-1} & \cdots & \varepsilon_{k-1}^{k-1} \\ \varepsilon_0^{k-2} & \varepsilon_1^{k-2} & \cdots & \varepsilon_{k-1}^{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_0^{0} & \varepsilon_1^{0} & \cdots & \varepsilon_{k-1}^{0} \end{vmatrix}$$

mit $E_{k-\lambda,\varkappa}$, so ist nach (25)

$$\gamma_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{k-\lambda} \frac{E_{k-\lambda,\varkappa}}{E} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{26}$$

Nun ist aber

$$\frac{E_{k-\lambda,\varkappa}}{E} = \frac{1}{k} \varepsilon_\varkappa^\lambda \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1; \ \lambda = 1, 2, \ldots, k) \tag{27}$$

Man sieht dies wohl am raschesten ein, wenn man beachtet, daß für $\mu = 1, 2, \ldots, k$ und $\lambda = 1, 2, \ldots, k$

$$\varepsilon_0^{k-\mu} \frac{E_{k-\lambda,0}}{E} + \varepsilon_1^{k-\mu} \frac{E_{k-\lambda,1}}{E} + \cdots + \varepsilon_{k-1}^{k-\mu} \frac{E_{k-\lambda,k-1}}{E} = \delta_{\lambda\mu}$$

sein muß, wo $\delta_{\lambda\mu} = 1$, wenn $\lambda = \mu$, und $\delta_{\lambda\mu} = 0$, wenn $\lambda \neq \mu$, und

aß durch diese Forderung die Größen $\frac{E_{k-\lambda,\varkappa}}{E}$ eindeutig bestimmt sind. s ist aber in der Tat

$$\frac{1}{k}\left[\varepsilon_0^{k-\mu}\varepsilon_0^{\lambda}+\varepsilon_1^{k-\mu}\varepsilon_1^{\lambda}+\cdots+\varepsilon_{k-1}^{k-\mu}\varepsilon_{k-1}^{\lambda}\right]$$

$$=\frac{1}{k}\left[1+\varepsilon_{\lambda-\mu}+\varepsilon_{\lambda-\mu}^{2}+\cdots+\varepsilon_{\lambda-\mu}^{k-1}\right]=\begin{cases}1, & \text{wenn } \lambda=\mu,\\ 0, & \text{wenn } 0<|\lambda-\mu|\leqq k-1.\end{cases}$$

Aus (24), (26) und (27) folgt, daß

28)
$$a_{\sigma n}=\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\left(\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-\sigma}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\right)\alpha_{\varkappa}^{n}$$

$$(\sigma=1,2,\ldots,k;\quad n=0,1,2,\ldots).$$

6. Diese Formeln stellen nun aber auch in dem bisher ausgeschlossenen all, daß eine der Zahlen $\alpha_\varkappa$ gleich Null ist, diejenige Lösung der ifferenzengleichungen (3) dar, welche die Anfangswerte $a_{10},\ldots,a_{k0}$ at, sofern wir nur vereinbaren, daß $\alpha_\varkappa^0$ auch dann den Wert 1 haben oll, wenn $\alpha_\varkappa=0$ ist. Unter dieser Annahme ist nämlich ausnahmslos

$$\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\left(\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-\sigma}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\right)\alpha_{\varkappa}^{0}=\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-\sigma}$$

$$=\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}a_{\sigma 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\sigma}\cdot k=a_{\sigma 0}\qquad(\sigma=1,2,\ldots,k);$$

lso liefern die Formeln (28) die richtigen Anfangswerte. Ferner ist ir $s=1,2,\ldots,k$ und $n\geqq 0$[3])

$$q\sum_{\sigma=1}^{s-1}a_{\sigma n}+a_{sn}+p\sum_{\sigma=s+1}^{k}a_{\sigma n}$$

$$-\frac{1}{k}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_{\varkappa}^{n}\left\{q\sum_{\sigma=1}^{s-1}\varepsilon_{\varkappa}^{-\sigma}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}+\varepsilon_{\varkappa}^{-s}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{s}+p\sum_{\sigma=s+1}^{k}\varepsilon_{\varkappa}^{-\sigma}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\right\}$$

$$-\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{s}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}\sum_{\lambda=1}^{k}a_{\lambda 0}\varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-s}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_{\varkappa}^{n}\left\{q\sum_{\sigma=1}^{s-1}\left(\varepsilon_{k}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-\sigma}+\right.$$

$$\left.+1+p\sum_{\sigma=s+1}^{k}\left(\varepsilon_{\varkappa}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-\sigma}\right\}=a_{s,n+1}.$$

eil für $\varkappa=0,1,2,\ldots,k-1$

$$q\sum_{\sigma=1}^{s-1}\left(\varepsilon_{\varkappa}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-\sigma}+1+p\sum_{\sigma=s+1}^{k}\left(\varepsilon_{\varkappa}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-\sigma}$$

$$=q\,\varepsilon_{\varkappa}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\frac{1-\left(\varepsilon_{\varkappa}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-1}}{1-\varepsilon_{\varkappa}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}}+1+p\,\frac{1-\left(\varepsilon_{\varkappa}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^{s-k}}{\varepsilon_{\varkappa}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}-1}$$

[3]) Für $s=1$ bedeute $\sum_{\sigma=1}^{s-1}$, für $s=k$ bedeute $\sum_{\sigma=s+1}^{k}$ jeweils 0.

$$= \frac{1-p-(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa - q\left(\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^s + p\frac{q}{p}\left(\varepsilon_\varkappa\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\right)^s}{1-\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,\varepsilon_\varkappa} = \alpha_\varkappa$$

ist. Die Ausdrücke (28) befriedigen also auch das Differenzengleichungssystem (3).

§ 2.

Untersuchung des infinitären Verhaltens der $a_{\sigma n}$ und der Quotienten $\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$.

1. Wir wollen zunächst zeigen, daß für ungerades k

(29 a) $|\alpha_0| > |\alpha_1| = |\alpha_{k-1}| > |\alpha_2| = |\alpha_{k-2}| > \ldots > |\alpha_{\frac{k-1}{2}}| = |\alpha_{\frac{k+1}{2}}| > 0$

und für gerades k

(29 b) $|\alpha_0| > |\alpha_1| = |\alpha_{k-1}| > |\alpha_2| = |\alpha_{k-2}| > \ldots > |\alpha_{\frac{k}{2}-1}| = |\alpha_{\frac{k}{2}+1}| > |\alpha_{\frac{k}{2}}| \geqq 0$;

da bei geradem k $\varepsilon_{\frac{k}{2}} = -1$ ist, steht nach Formel (17) in (29 b) am Schluß statt des Größerzeichens das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$$1-p+(1-pr)\sqrt[k]{\frac{1}{r}} = 0,$$

d. h.

$$p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}, \quad q = r\,\frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}. \tag{30}$$

Die Ungleichungen (29) ergeben sich folgendermaßen: Es ist nach (17) und (15)

$$|\alpha_\varkappa|^2 = \alpha_\varkappa\bar{\alpha}_\varkappa = \frac{(1-p)-(1-q)\tau_\varkappa}{1-\tau_\varkappa}\cdot\frac{(1-p)-(1-q)\bar{\tau}_\varkappa}{1-\bar{\tau}_\varkappa} \tag{31}$$

$$= \frac{(1-p)^2 - 2(1-p)(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + (1-q)^2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^2}{1-2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^2}.$$

Das sind gerade die Werte, die die Funktion

$$\varphi(t) = \frac{(1-p)^2 - 2(1-p)(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos t + (1-q)^2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^2}{1-2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos t+\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^2}$$

n den Stellen $t = \frac{2\varkappa\pi}{k}$ annimmt. Ihre Ableitung ist

$$\varphi'(t) = \frac{2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\,(p-q)\left[1-p-(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{2}\right]}{\left[1-2\sqrt[k]{\frac{p}{q}}\cos t+\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{2}\right]^{2}}\sin t.$$

m zu zeigen, daß $\varphi'(t)<0$ im Intervall $0<t<\pi$, betrachten wir die unktion

$$\psi(u) = \frac{u-1}{\sqrt[k]{u^{k-2}}}$$

ir $u>0$. Deren Ableitung

$$\psi'(u) = \frac{(k-2)u+2}{k\,u\sqrt[k]{u^{k-2}}}$$

st für $u>0$ positiv; $\psi(u)$ steigt also im Intervall $0<u<\infty$ monoton; aher ist für $p \lesseqgtr q$

$$\frac{p-1}{\sqrt[k]{p^{k-2}}} \lesseqgtr \frac{q-1}{\sqrt[k]{q^{k-2}}},$$

$$1-p-(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{2} \gtreqless 0,$$

$$(p-q)\left[1-p-(1-q)\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{2}\right] < 0.$$

n $\varphi'(t)$ hat also $\sin t$ einen negativen Faktor. Daher ist $\varphi'(t)<0$, $\varphi(t)$ immt im Intervall $0<t<\pi$ monoton ab. Es ist also

$$|\alpha_0|^2 > |\alpha_1|^2 > |\alpha_2|^2 > \ldots > |\alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]}|^2 \geqq 0,$$

obei das Gleichheitszeichen nur gelten kann, wenn k gerade ist. ieraus folgen aber die Ungleichungen (29), da die Einheitswurzeln $_{\varkappa}$ und $\varepsilon_{k-\varkappa}$ und damit auch die Zahlen $\alpha_\varkappa$ und $\alpha_{k-\varkappa}$ zueinander konjugiert omplex sind.

2. Nach (29) ist $\alpha_0 \neq 0$; daher ist nach (28) und (29)

32) $$\frac{a_{\sigma n}}{\alpha_0^n} = \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\left\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} + \sum_{\varkappa=1}^{k-1}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\,\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n\right\},$$

lso für $n\to\infty$

33) $$\frac{a_{\sigma n}}{\alpha_0^n} \to \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k).$$

Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß die Anfangswerte $a_{\lambda 0}$ so ewählt sind, daß

34) $$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \neq 0.$$

Dies trifft insbesondere in dem von Herrn Krafft allein betrachteten Fall zu, daß die Anfangswerte nicht negativ und nicht alle gleich Null sind. Dann folgt aus (33), daß für $n \to \infty$

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} \to \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} = \sqrt[k]{r}^{\sigma-1} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k). \tag{35}$$

Damit ist insbesondere die Eulersche Behauptung schon beinahe in größter Allgemeinheit bewiesen, denn wir werden in § 3 sehen, daß, abgesehen von einem einzigen trivialen Ausnahmefall, der überdies nur bei geradem k auftreten kann, das Eulersche Verfahren immer divergiert oder überhaupt nicht durchführbar ist, wenn die Voraussetzung (34) nicht gilt.

3. Für alle hinreichend großen n ist unter der Voraussetzung (34) $a_{1n} \neq 0$. Für diese n wird

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} \left\{ 1 + \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k-1} \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\, \varepsilon_\varkappa^{\lambda} (\varepsilon_\varkappa^{-\sigma} - \varepsilon_\varkappa^{-1}) \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n}{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\, \varepsilon_\varkappa^{\lambda-1} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n} \right\},$$

also

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} - \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} =$$

$$\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k-1} (\varepsilon_\varkappa^{-\sigma} - \varepsilon_\varkappa^{-1}) \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_\varkappa^{\lambda}}{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \varepsilon_\varkappa^{-1} \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\, \varepsilon_\varkappa^{\lambda} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}}. \tag{36}$$

Wir machen jetzt die weitere Voraussetzung, daß insbesondere $a_{10} \neq 0$ sein soll, und führen die Zahlen $\Delta_{\lambda 0}$ durch die Gleichung

$$\frac{a_{\lambda 0}}{a_{10}} - \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\lambda-1} = \Delta_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\lambda-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k) \tag{37}$$

ein; $\Delta_{\lambda 0}$ ist der relative Fehler, mit dem schon $\frac{a_{\lambda 0}}{a_{10}}$ die Zahl $\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\lambda-1}$ annähert. Weil

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{a_{\lambda 0}}{a_{10}} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_\varkappa^{\lambda} = \sqrt[k]{\frac{p}{q}} \sum_{\lambda=1}^{k} \varepsilon_\varkappa^{\lambda} + \sqrt[k]{\frac{p}{q}} \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0}\, \varepsilon_\varkappa^{\lambda}$$

$$= \begin{cases} 0 + \sqrt[k]{\frac{p}{q}} \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0}\, \varepsilon_\varkappa^{\lambda} & \text{für} \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k-1, \\ k \sqrt[k]{\frac{p}{q}} - \sqrt[k]{\frac{p}{q}} \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0} & \text{für} \quad \varkappa = 0. \end{cases}$$

gibt sich aus (36), daß

$$\text{8)}\qquad \frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} - \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} = \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} \frac{\sum_{\varkappa=1}^{k-1} \left(\varepsilon_\varkappa^{-\sigma} - \varepsilon_\varkappa^{-1}\right)\left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0}\, \varepsilon_\varkappa^{\lambda}}{k + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \varepsilon_\varkappa^{-1}\left(\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right)^n \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda 0}\, \varepsilon_\varkappa^{\lambda}}.$$

ernach wird beim n-ten Schritt die Approximation von $\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1}$ durch n Quotienten $\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$ im allgemeinen um so besser sein, je kleiner schon e absoluten Beträge der relativen Fehler $\Delta_{\lambda 0}$ sind. Es ist für jedes n

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} - \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} \to 0, \text{ wenn } \sum_{\lambda=1}^{k} |\Delta_{\lambda 0}| \to 0.$$

4. Für $k = 2$ wird

$$\alpha_0 = 1 + \sqrt{pq}, \quad \alpha_1 = 1 - \sqrt{pq}$$

nd nach (38) und (37) nach leichter Umformung

$$\frac{a_{2n}}{a_{1n}} - \sqrt{\frac{q}{p}} = 2\sqrt{\frac{q}{p}} \frac{\left(\frac{a_{20}}{a_{10}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)\left(\frac{1-p\sqrt{r}}{1+p\sqrt{r}}\right)^n}{\frac{a_{20}}{a_{10}} + \sqrt{\frac{q}{p}} - \left(\frac{a_{20}}{a_{10}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)\left(\frac{1-p\sqrt{r}}{1+p\sqrt{r}}\right)^n}.$$

ird $p > \frac{1}{\sqrt{r}}$ gewählt, so schließen also je zwei aufeinander folgende uotienten $\frac{a_{2n}}{a_{1n}}$ und $\frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}}$ die $\sqrt{\frac{q}{p}}$ ein. Für $p = 1$, also $r > 1$ hat es schon Herr Lorey a. a. O. festgestellt.

5. Der Formel (38) entnimmt man, daß die Grenzübergänge (35) n so rascher erfolgen werden, je kleiner die Zahlen $\left|\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right|$ sind. Wir ollen jetzt zeigen, daß man in gewissem Umfang alle diese Zahlen eichzeitig dadurch verkleinern kann, daß man die Zahlen p und q i Rahmen der Bedingung $q = pr$ geeignet wählt.

Nach (31) ist

$$\left|\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right|^2 = \frac{(1-p)^2 - 2(1-p)(1-rp)\sqrt[k]{\frac{1}{r}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + (1-rp)^2\sqrt[k]{\frac{1}{r}}^2}{1 - 2\sqrt[k]{\frac{1}{r}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{\frac{1}{r}}^2}$$

$$\text{9)}\qquad < \left(\frac{1 - \sqrt[k]{\frac{1}{r}}}{1 - p - (1-rp)\sqrt[k]{\frac{1}{r}}}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt[k]{r} - 1\right)^2}{\left(\sqrt[k]{r} - 1\right)^2 + 4\sqrt[k]{r}\sin^2\frac{\varkappa\pi}{k}} \cdot F_\varkappa(p),$$

wobei

$$(40)\quad F_\varkappa(p) = 1 + 4\sqrt[k]{r}\,\sin^2\frac{\varkappa\pi}{k}\,\frac{(1-p)\,(1-rp)}{[1-\sqrt[k]{r}\;\;p\,(r-\sqrt[k]{r})]^2}\quad(\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1)$$

Die Kurven $y = F_\varkappa(p)$ haben alle eine zur y-Achse parallele Asymptote links von der Ordinatenachse an derselben Stelle $p = p_A = \frac{1-\sqrt[k]{r}}{r-\sqrt[k]{r}}$ und alle ihre kleinste Ordinate rechts vom Nullpunkt an derselben Stelle $p = p_{\text{Min}} = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$. Jede einzelne Kurve hat außerdem die Gerade

$$y = F_\varkappa(\infty) = 1 + \frac{4r\sqrt[k]{r}}{(r-\sqrt[k]{r})^2}\sin^2\frac{\varkappa\pi}{k}$$

zur Asymptoten. Im Intervall $-\infty < p < p_A$ steigt $F_\varkappa(p)$ monoton vom Wert $F_\varkappa(\infty)$ nach Unendlich, im Intervall $p_A < p < p_{\text{Min}}$ fällt $F_\varkappa(p)$ monoton von Unendlich bis zum Minimum $\left(\cos\frac{\varkappa\pi}{k}\right)^2$. Es ist $F_\varkappa(0)$ noch größer als $F_\varkappa(\infty)$, wenn $k > 2$, und $F_\varkappa(0) = F_\varkappa(\infty)$ für $k = 2$. Im Intervall $p_{\text{Min}} < p < \infty$ steigt $F_\varkappa(p)$ vom Kleinstwert $\left(\cos\frac{\varkappa\pi}{k}\right)^2$ wieder monoton zum Wert $F_\varkappa(\infty)$ an. Zwischen $p = 1$ und $p = \frac{1}{r}$ bleibt $F_\varkappa(p)$ unterhalb 1.

Hiernach wird die Konvergenz des Eulerschen Verfahrens besonders gut, wenn man

$$p \sim \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}},\quad q = rp \sim r\,\frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$$

wählt, d. h. angenähert gleich den Werten, für welche nach (30) für gerades k $\alpha_{\frac{k}{2}} = 0$ wird. Nach (39) ist es unter diesen Bedingungen außerdem vorteilhaft, wenn r nahe bei 1 liegt, weil dann auch der von p freie Bestandteil von $\left|\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_0}\right|$ klein wird.

6. Diese letzte Feststellung legt es nahe, das Eulersche Verfahren dadurch zu verbessern, daß man nicht mit konstantem p und q operiert, sondern mit veränderlichen p_n und q_n, also im Falle $k = 2$

$$a_{1,n+1} = a_{1n} + p_n a_{2n},\quad a_{2,n+1} = q_n a_{1n} + a_{2n}$$

setzt und p_n und q_n durch das Verfahren selbst verbessert: die Forderung, daß

$$q_n \sim r\,\frac{1+\sqrt{r}}{r+\sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

sein soll, kann man durch den Ansatz

$$q_n = \frac{a_{2n}}{a_{1n}}$$

friedigen und $p_n = \frac{q_n}{r}$ setzen. Dann wird

$$\frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} = \frac{2\,a_{1n}\,a_{2n}\,r}{a_{1n}^2\,r + a_{2n}^2}$$

ler, wenn man zur Abkürzung $c_n = a_{2n}/a_{1n}$ einführt,

$$c_{n+1} = \frac{2\,c_n\,r}{r + c_n^2}.$$

ese Abwandlung des Eulerschen Verfahrens führt also gerade auf s Heronsche Verfahren der Quadratwurzelberechnung. Dessen Konrgenz ist in der Tat besser als diejenige des Eulerschen Verhrens; beim Heronschen Verfahren ist nämlich der relative Fehler r folgenden Näherung immer proportional der zweiten Potenz des lativen Fehlers der vorangehenden Näherung, beim Eulerschen Verhren ist er dagegen, wie ein Blick auf Formel (38) zeigt, nur prortional der ersten Potenz des relativen Fehlers der vorangehenden äherung.

Wenn $k > 2$ ist, führt die entsprechende Abänderung des Eulerhen Verfahrens einerseits zu unhandlicheren Formeln, andererseits er auch nicht zu einer solch wesentlichen Verbesserung der Konrgenz, wie sie sich im Falle $k = 2$ ergibt. Doch darauf soll hier cht näher eingegangen werden. Es mag nur noch bemerkt werden, ß bezüglich der Raschheit der Konvergenz das Eulersche Verfahren m Heron-Newtonschen Verfahren[4]) und erst recht dem Lambertschen rfahren[5]) zur Berechnung von $\sqrt[k]{r}$ unterlegen ist; seine Besonderit ist darin zu sehen, das es die Zahlen $\sqrt[k]{r}$, $\sqrt[k]{r^{-2}}$, ..., $\sqrt[k]{r^{-k-1}}$ gleichitig liefert.

[4]) Beim Heron-Newton'schen Verfahren ist $x_0 > 0$, sonst beliebig,

$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k}\,x_n + \frac{r}{k\,x_n^{k-1}} \qquad \text{für } n \geqq 0,$$

$\to \sqrt[k]{r}$ und

$$0 < \frac{x_n - \sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}} < \frac{2}{k-1}\left|\frac{k-1}{2}\,\frac{x_0 - \sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}}\right|^{2^n} \qquad \text{für } n \geqq 1.$$

e Abschätzung (*) steht bei C. Schmidt, Über einen Algorithmus zur Berechnung r n^{ten} Wurzel aus a. Math. Annalen **45**, 1894, S. 301—308. Vgl. auch Z. Chajoth, ronische Näherungsbrüche. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verigung **42**, 1930, S. 130—135.

[5]) J. H. Lambert, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anndungen. Zweyter Theil. Erster Abschnitt. Berlin 1770, S. 152—153. Wegen Einzelheiten vgl. M. Müller, Lamberts Verfahren zur Gleichungsauflösung. och nicht veröffentlicht.)

§ 3.

Fortsetzung. Die bisher ausgeschlossenen Ausgangswerte.

1. Jetzt wollen wir zusehen, was eintritt, wenn die Bedingung (34) verletzt ist. Ist $a_{10} = a_{20} = \ldots = a_{k0} = 0$, so wird nach (3 auch $a_{1n} = a_{2n} = \ldots = a_{kn} = 0$ für alle positiven n, dann verlier die Eulersche Aussage ihren Sinn. Wir werden also voraussetzen daß nicht alle Ausgangswerte gleich Null sind. Das bedingt, daß nicht alle Summen

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{41}$$

verschwinden, da die Determinante des Gleichungssystems

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda} \left(a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \right) = 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1$$

von Null verschieden ist. Da $\varepsilon_{\varkappa}$ und $\varepsilon_{k-\varkappa}$ zu einander konjugiert-kom plex und die Zahlen $a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}$ reell sind, muß dann schon unter de $\left[\frac{k}{2}\right]$ ersten der Summen (41) eine von Null verschieden sein.

2. Bei unseren weiteren Betrachtungen benutzen wir die Funktione

$$f_{\varkappa\sigma}(t) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \cos\left(\frac{2\varkappa(\lambda-\sigma)\pi}{k} + t \right) \tag{42}$$

$$(\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1;\ \sigma = 1, 2, \ldots, k)$$

und folgende ihrer Eigenschaften:

Es ist

$$f_{\varkappa\sigma}(t) = \tag{43}$$

$$= \left(\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \cos \frac{2\varkappa(\lambda-\sigma)\pi}{k} \right) \cos t - \left(\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \sin \frac{2\varkappa(\lambda-\sigma)\varkappa}{k} \right) \sin$$

$$= f_{\varkappa\sigma}(0) \cos t + f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin t,$$

$$M_{\varkappa\sigma} = \max_{-\infty < t < \infty} f_{\varkappa\sigma}(t) = \sqrt{f_{\varkappa\sigma}(0)^2 + f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}, \tag{44}$$

$$\min_{-\infty < t < \infty} f_{\varkappa\sigma}(t) = -M_{\varkappa\sigma}.$$

Ist $M_{\varkappa\sigma} > 0$, so ist

$$f_{\varkappa\sigma}(t) = M_{\varkappa\sigma} \cos(t + P_{\varkappa\sigma}), \tag{45}$$

wo die Phasenverschiebung $P_{\varkappa\sigma}$ durch die Bedingungen

$$\cos P_{\varkappa\sigma} = \frac{f_{\varkappa\sigma}(0)}{M_{\varkappa\sigma}}, \quad \sin P_{\varkappa\sigma} = -\frac{f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{M_{\varkappa\sigma}}, \quad 0 \leqq P_{\varkappa\sigma} < 2\pi \tag{46}$$

eindeutig festgelegt ist. Setzen wir $P_{\varkappa\sigma} = 0$, falls $M_{\varkappa\sigma} = 0$, so gil ausnahmslos die Formel (45).

Es ist

$$f_{\varkappa\sigma}(t) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \cos\left(\frac{2\varkappa(\lambda-1)\pi}{k} - \frac{2\varkappa(\sigma-1)\pi}{k} + t\right),$$

n.

)
$$f_{\varkappa\sigma}(t) = f_{\varkappa 1}(t - d_{\varkappa\sigma}) = M_{\varkappa 1} \cos(t - d_{\varkappa\sigma} + P_{\varkappa 1}),$$

nn

)
$$\frac{2\varkappa(\sigma-1)\pi}{k} = d_{\varkappa\sigma}$$

setzt wird.

3. Ist $\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda} = 0$, so ist auch für $\sigma = 1, 2, \ldots, k$

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-\sigma} = f_{\varkappa\sigma}(0) - i f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

n. $f_{\varkappa\sigma}(0) = 0$ und $f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ist aber $\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda} \neq 0$, so ist ch für $\sigma = 1, 2, \ldots, k$

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \varepsilon_{\varkappa}^{\lambda-\sigma} \neq 0$$

d $M_{\varkappa\sigma} > 0$.

4. Für die weitere Untersuchung müssen wir auch die Funktionen

)
$$\omega_{\varkappa} = \omega_{\varkappa}(p) = \arg \alpha_{\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1;\ 0 \leqq \omega_{\varkappa} < 2\pi)$$

nauer kennen. Da $\alpha_{\varkappa} = \bar{\alpha}_{\varkappa-k}$ ist, genügt es, diese Funktionen für Nummern $\varkappa = 0, 1, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right]$ zu untersuchen.

Nach (17) und (15) ist

$$\alpha_{\varkappa} = \frac{\left[(1-p)\sqrt[k]{r}\left(\sqrt[k]{r} - \cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right) + (1-rp)\left(1 - \sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)\right]}{1 - 2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{r}^2} +$$

)
$$+ i\,\frac{p(r-1)\sqrt[k]{r}\sin\frac{2\varkappa\pi}{k}}{1 - 2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{r}^2}.$$

ernach ist

)
$$\alpha_0 = 1 + p\,\frac{\sqrt[k]{r} - r}{1 - \sqrt[k]{r}} > 1 > 0; \quad \omega_0 = 0$$

d, falls k gerade, $k = 2h$ ist,

$$\alpha_h = 1 - p\,\frac{\sqrt[k]{r} + r}{1 + \sqrt[k]{r}} \gtreqless 0 \quad \text{für} \quad p \lesseqgtr \frac{1 + \sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r} + r},$$

also

$$\omega_{\frac{k}{2}} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad \text{für } p \lessgtr \frac{1+\sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}+r}. \tag{51}$$

Für $p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}+r}$ ist $\omega_{\frac{k}{2}}$ an und für sich unbestimmt; wir wollen

$$\omega_{\frac{k}{2}} = 0 \quad \text{für } p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{\sqrt[k]{r}+r} \tag{52}$$

setzen.

Ist $0 < \varkappa < \frac{k}{2}$, so ist nach (29) $|\alpha_\varkappa| > 0$ und daher nach (49) und (3

$$\frac{\alpha_\varkappa}{|\alpha_\varkappa|} =$$

$$\frac{\left[(1-p)\sqrt[k]{r}\left(\sqrt[k]{r}-\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)+(1-rp)\left(1-\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)\right]+i\left[p(r-1)\sqrt[k]{r}\sin\frac{2\varkappa\pi}{k}\right.}{\sqrt{1-2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+\sqrt[k]{r^2}}\ \sqrt{(1-p)^2\sqrt[k]{r^2}-2(1-p)(1-rp)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(1-rp}}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega_\varkappa &= \\ &= \frac{(1-p)\sqrt[k]{r}\left(\sqrt[k]{r}-\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)+(1-rp)\left(1-\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)}{\sqrt{1-2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+\sqrt[k]{r^2}}\ \sqrt{(1-p)^2\sqrt[k]{r^2}-2(1-p)(1-rp)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(1-rp}} \\ \sin\omega_\varkappa &= \\ &= \frac{p(r-1)\sqrt[k]{r}\sin\frac{2\varkappa\pi}{k}}{\sqrt{1-2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+\sqrt[k]{r^2}}\ \sqrt{(1-p)^2\sqrt[k]{r^2}-2(1-p)(1-rp)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(1-rp)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Wir wollen

$$\Phi_\varkappa(p) = \frac{(p-1)\sqrt[k]{r}\left(\sqrt[k]{r}-\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)+(rp-1)\left(1-\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}\right)}{\sqrt{(p-1)^2\sqrt[k]{r^2}-2(p-1)(rp-1)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(rp-1)^2}}$$

setzen, sodaß

$$\cos\omega_\varkappa = -\frac{\Phi_\varkappa(p)}{\sqrt{1-2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+\sqrt[k]{r^2}}}$$

wird. Es ist

$$\Phi'_\varkappa(p) = \frac{p\sqrt[k]{r^2}(1-r)^2\sin^2\frac{2\varkappa\pi}{k}}{\sqrt{(p-1)^2\sqrt[k]{r^2}-2(p-1)(rp-1)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k}+(rp-1)^2}^3} > 0$$

$p > 0$. Da

$$\Phi_\varkappa(0) = -\sqrt{\sqrt[k]{r^2} - 2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + 1},$$

$$\Phi_\varkappa(\infty) = \lim_{p\to\infty}\Phi_\varkappa(p) =$$

$$= \frac{\sqrt[k]{r^2} - (1+r)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + r}{\sqrt{\sqrt[k]{r^2} - 2r\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + r}} > -|\sqrt[k]{r} - 1|,$$

für $0 < p < \infty$

$$1 > \cos\omega_\varkappa$$

$$> -\frac{\sqrt[k]{r^2} - (1+r)\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + r}{\sqrt{1 - 2\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{r^2}}\ \sqrt{r^2 - 2r\sqrt[k]{r}\cos\frac{2\varkappa\pi}{k} + \sqrt[k]{r^2}}} = g_\varkappa$$

d dabei $g_\varkappa > 1$. Aus (53) und (54) ergibt sich: $\omega_\varkappa = \omega_\varkappa(p)$ durchft, wenn p von 0 bis ∞ wächst, stetig das Intervall

$$0 < \omega_\varkappa < \overline{\arccos}\ g_\varkappa < \pi, \text{ falls } r > 1,$$

er das Intervall

$$2\pi > \omega_\varkappa > 2\pi - \overline{\arccos}\ g_\varkappa > \pi, \text{ falls } 0 < r < 1.$$

5. Ist k ungerade, $k = 2h+1$, so ist nach (28)

$$= \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\left\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_\varkappa^n + \right.$$

$$\left. + \sum_{\varkappa=h+1}^{2h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_\varkappa^n\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\sigma}\left\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_\varkappa^n + \right.$$

$$\left. + \sum_{\varkappa'=h}^{1}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_{2h+1-\varkappa'}^{\lambda-\sigma}\alpha_{2h+1-\varkappa'}^n\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\left\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}(\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_\varkappa^n + \varepsilon_{2h+1-\varkappa}^{\lambda-\sigma}\alpha_{2h+1-\varkappa}^n)\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\left\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + \sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}(\varepsilon_\varkappa^{\lambda-\sigma}\alpha_\varkappa^n + \bar{\varepsilon}_\varkappa^{\lambda-\sigma}\bar{\alpha}_\varkappa^n)\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma}\left\{\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\alpha_0^n + 2\sum_{\varkappa=1}^{h}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}|\alpha_\varkappa|^n\cos\left(\frac{2\varkappa(\lambda-\sigma)\pi}{k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + n\omega_\varkappa\right)\right\},$$

so mit Rücksicht auf (42) und (50)

5) $$a_{\sigma n} = \frac{1}{k}\sqrt[k]{r}^{-\sigma}\{f_{0\sigma}(0)|\alpha_0|^n + 2\sum_{\varkappa=1}^{h} f_{\varkappa\sigma}(n\omega_\varkappa)|\alpha_\varkappa|^n\}.$$

Ist k gerade, $k = 2h$, so ergibt sich entsprechend mit Berücksichtigung von (50), (51) und (52), daß

$$(56) \qquad a_{\sigma n} = \frac{1}{k}\sqrt[k]{r^{\sigma}}\left\{f_{0\sigma}(0)\,|\alpha_0|^n + 2\sum_{\varkappa=1}^{h-1} f_{\varkappa\sigma}(n\omega_\varkappa)\,|\alpha_\varkappa|^n + f_{h\sigma}(n\omega_h)\,|\alpha_h|^n\right\}.$$

6. Wir wenden uns jetzt der Frage nach dem infinitären Verhalten der $a_{\sigma n}$ zu und behandeln zunächst den Fall $k = 2h+1$. Es sei nunmehr, nachdem der Fall

$$f_{0\sigma}(0) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \neq 0$$

bereits in § 2 erledigt wurde, eine ganze Zahl K vorhanden, sodaß $1 \leqq K \leqq h$ und

$$(57) \qquad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_\varkappa^\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, K-1, \\ \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0}\sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda}\varepsilon_K^\lambda \neq 0. \end{cases}$$

Dann ist $f_{\varkappa\sigma}(0) = 0$ und $f_{\varkappa\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und daher nach (43) auch $f_{\varkappa\sigma}(n\omega_\varkappa) = 0$ für $\varkappa = 0, 1, \ldots, K-1$, aber $M_{K\sigma} > 0$ und daher nach (45) $f_{K\sigma}(t)$ nicht konstant und insbesondere nicht ständig gleich Null. Nach (55) und (29 a) ist für $n \to \infty$

$$(58) \qquad \frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_K|^n} = \frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{\sigma}}\, f_{K\sigma}(n\omega_K) + o(1)^{6}).$$

Es ist also

$$(59) \qquad -\frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{\sigma}}\, M_{K\sigma} \leqq \varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_K|^n} \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_K|^n} \leqq \frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{\sigma}}\, M_{K\sigma}.$$

Wir bezeichnen den kleinsten nicht-negativen Rest von β mod 2π mit $R(\beta)$.

Es sei T im Intervall $0 \leqq T < 2\pi$ beliebig gewählt und p eine positive Zahl, für welche $\omega_K = \omega_K(p)$ ein irrationales Vielfaches von 2π ist. Dann liegen bekanntlich die Reste $R(n\omega_K)$ im Intervall $\langle 0, 2\pi\rangle$ überall dicht[7]). Wir können eine Nummernteilfolge $n_1, n_2, \ldots, n_\mu, \ldots$ die von T, aber nicht von σ abhängig ist, bei der also $n_\mu = n_\mu(T)$ ist, derart finden, daß für $\mu \to \infty$

$$R(n_\mu\omega_K) \to T$$

und damit

$$f_{K\sigma}(n_\mu\omega_K) = f_{K\sigma}(R(n_\mu\omega_K)) \to f_{K\sigma}(T)$$

und

$$(60) \qquad \frac{a_{\sigma n_\mu}}{|\alpha_K|^{n_\mu}} \to \frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{\sigma}}\, f_{K\sigma}(T).$$

[6]) Für $K = h$ ist $o(1) \equiv 0$.

[7]) Vgl. z. B. O. Perron, Irrationalzahlen. (1. Aufl. 1929, 2. Aufl. 1939), S. 143

a hierbei $f_{K\sigma}(T)$ jeden Wert zwischen $-M_{K\sigma}$ und $M_{K\sigma}$ haben kann, nd $M_{K\sigma}>0$ ist, ist unter den gegenwärtigen Voraussetzungen also ie Folge $\{a_{\sigma n}/|\alpha_K|^n\}$ gewiß nicht konvergent; sie hat vielmehr alle ahlen des Intervalles $\left\langle -\frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}M_{K\sigma},\ \frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{-\sigma}}M_{K\sigma}\right\rangle$ zu Häufungswerten.

Nun sei p so beschaffen, daß $\omega_K(p)$ ein rationales Vielfaches von π, etwa

51) $$\omega_K = \omega_K(p) = 2\pi\frac{u}{v} \qquad (u, v \text{ ganz und relativ prim, } v>0)$$

t[8]). Nach Nr. 4 ist

52) $$\begin{cases} 0<u<\frac{v}{2\pi}\ \overline{\arccos}\ g_K<\frac{v}{2} & \text{für } r>1,\\ v>u>v\left(1-\frac{1}{2\pi}\ \overline{\arccos}\ g_K\right)>\frac{v}{2} & \text{für } 0<r<1, \end{cases}$$

o g_K die in (54) definierte Zahl ist. Als Werte von $R(n\omega_K)$ kom- en genau die Zahlen $0\cdot\frac{2\pi}{v}$, $1\cdot\frac{2\pi}{v}$, ..., $(v-1)\cdot\frac{2\pi}{v}$ in Betracht. Ist $(m\omega_K) = R_m$ für $m = 0, 1, \ldots, v-1$, so ist auch $R(n\omega_K) = R_m$, enn $n = m+\mu v$ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$), also nach (45) auch

$$f_{K\sigma}(n\omega_K) = f_{K\sigma}(R(n\omega_K)) = f_{K\sigma}(R_m)$$

nd nach (58) für $\mu\to\infty$

53) $$\frac{a_{\sigma,m+\mu v}}{|\alpha_K|^{m+\mu v}} \to \frac{2}{k}\sqrt[k]{r^{\sigma}}f_{K\sigma}(R_m) \qquad (m = 0, 1, \ldots, v-1).^{9})$$

a bei der Voraussetzung (57) die Funktion $f_{K\sigma}(t)$ nicht konstant t, nimmt sie, wie man ihrer Darstellung (45) entnimmt, im Intervall $\leqq t<2\pi$ jeden Wert genau zweimal an. Da die Zahlen R_m unter- nander verschieden sind, kann in (63) auf der rechten Seite höch- ens dann für $m = 0, 1, 2, \ldots, v-1$ derselbe Grenzwert stehen, enn $v = 2$ ist. Dann gibt es aber keine ganze Zahl u, die die ngleichungen (62) befriedigt, also keine Zahl u, wie sie die Dar- ellung (61) verlangt. Also treten in (63) mindestens zwei verschie- ene Grenzwerte auf. Auch in diesem Fall konvergiert die Folge $a_{\sigma n}/|\alpha_K|^n\}$ gewiß nicht.

7. Ist k gerade, $k = 2h$, so gilt wörtlich dasselbe, solange $\leqq K\leqq h-1$ ist. Ist $K = h$, so sind nach (57) die Ausgangswerte ie Zahlen $a_{\lambda 0} = \frac{(-1)^\lambda}{k}\sqrt[k]{r^{\lambda}}C$, wo C eine beliebige von Null verschie- ene Zahl sein darf. Nach (56) wird

$$a_{\sigma n} = \frac{1}{k}\sqrt[h]{r^{\sigma}}f_{h\sigma}(n\omega_h)\,|\alpha_h|^n.$$

[8]) Man beachte, daß ω_K und damit u und v von σ unabhängig ist.

[9]) Wenn $K = h$ ist, kann hier der Pfeil durch das Gleichheitszeichen er- tzt werden.

Ist $p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$, so ist nach (29) und (30) $\alpha_h = 0$ und damit $a_{\sigma n} = 0$ für $n \geqq 1$. Der Quotient $\frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_h|^n}$ kann in diesem Fall nicht gebildet werden. Ist $p \leqq \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$, so ist $|\alpha_h| > 0$ und nach (51) $\omega_h = 0$, bzw. $= \pi$ und damit nach (43)

$$f_{h\sigma}(n\omega_h) = f_{h\sigma}(0)\cos(n\omega_h) = f_{h\sigma}(0), \text{ bzw. } = (-1)^n f_{h\sigma}(0)$$

und dabei

$$f_{h\sigma}(0) = \sum_{\lambda=1}^{k} (-1)^{\lambda-\sigma} a_{\lambda v} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \neq 0.$$

Es wird

$$\frac{a_{\sigma n}}{|\alpha_K|^n} = (\pm 1)^n \frac{1}{k} \sqrt[k]{r}^{\sigma} f_{K\sigma}(0) \quad \text{für} \quad p \leqq \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}.$$

In diesem Fall ist somit die Folge $\{a_{\sigma n}/|\alpha_K|^n\}$ je nach der Wahl von p konvergent oder divergent, oder sie kann überhaupt nicht gebildet werden.

8. Wir kommen zur Untersuchung des infinitären Verhaltens der Quotienten $\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$. Wir beginnen mit dem zuletzt betrachteten Fall. Ist k gerade und $K = \frac{k}{2}$, so ist

$$\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}} = \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma-1} = \sqrt[k]{r}^{\sigma-1} \quad \text{für} \quad p \leqq \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}. \tag{64}$$

Wenn $p = \frac{1+\sqrt[k]{r}}{r+\sqrt[k]{r}}$, ist $a_{1n} = a_{\sigma n} = 0$ für $n \geqq 1$, kann also der Quotient $\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$ nicht gebildet werden.

9. Nun sei k beliebig und $0 < K < \frac{k}{2}$. Dann gibt es mindestens drei verschiedene Stellen t_1, t_2, t_3 im Intervall $0 \leqq t < 2\pi$, für welche eine von σ unabhängige Teilfolge $\{n_{i\mu}\}$ derart existiert, daß für $\mu \to \infty$

$$\frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{|\alpha_K|^{n_{i\mu}}} \to \frac{2}{k} \sqrt[k]{\frac{q}{p}}^{\sigma} f_{K\sigma}(t_i) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, k;\ i = 1, 2, 3). \tag{65}$$

Ist nämlich $\omega_K(p)$ rationales Vielfaches von 2π und durch (61) dargestellt, so ist nach (62) $v \geqq 3$, so gibt es also mindestens drei verschiedene Reste R_0, R_1, R_2, für welche (63) gilt; die Zahlen $t_i = R_i$ und die Folgen mit den Elementen $n_{i\mu} = i - 1 + \mu v$ leisten das Gewünschte. Ist aber $\omega_K(p)$ irrationales Vielfaches von 2π, so erfüllen je drei verschiedene Stellen t_i mit den ihnen zugeordneten Folgen mit den Elementen $n_\mu(t_i) = n_{i\mu}$ die Bedingung (65).

Wenn nun $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}$ existieren und gleich G_σ sein soll, so muß auch $\lim_{\mu\to\infty} \frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{a_{1 n_{i\mu}}}$ existieren und gleich G_σ sein. Wenn $f_{K,1}(t_i) \neq 0$ ist

ıß dann nach (65)

$$G_\sigma = \lim_{\mu\to\infty} \frac{a_{\sigma n_{i\mu}} / |\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}}{a_{1n_{i\mu}} / |\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}} = \frac{\lim\limits_{\mu\to\infty} \frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{|\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}}}{\lim\limits_{\mu\to\infty} \frac{a_{1n_{i\mu}}}{|\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}}} = \sqrt[k]{r^{\sigma-1}}\,\frac{f_{K\sigma}(t_i)}{f_{K1}(t_i)},$$

h.

3) $$\sqrt[k]{r^{\sigma-1}}\, f_{K\sigma}(t_i) = G_\sigma f_{K1}(t_i)$$

n. Wenn aber $f_{K1}(t_i) = 0$ ist, muß auch $f_{K\sigma}(t_i) = 0$ sein, da dernfalls nach (65) für hinreichend große μ die Zahlen $\left|\frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{|\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}}\right|$ erhalb einer positiven Schranke blieben, $\frac{a_{1n_{i\mu}}}{|\alpha_\kappa|^{n_{i\mu}}}$ aber der Null be-big nahe käme, $\lim\limits_{\mu\to\infty} \frac{a_{\sigma n_{i\mu}}}{a_{1n_{i\mu}}}$ also nicht existieren würde. Die Be-hung (66) muß also ausnahmslos gelten.

Setzt man

$$G_\sigma \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\sigma-1} = G'_\sigma,\ t_i - P_{K1} = \Theta_i,$$

muß mit Rücksicht auf (46), weil $M_{K\sigma} > 0$ und damit auch $M_{K1} > 0$ ist,

$$\cos(\Theta_i - d_{K\sigma}) = G'_\sigma \cos\Theta_i$$

er

$$(\cos d_{K\sigma} - G'_\sigma)\cos\Theta_i - \sin d_{K\sigma}\sin\Theta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

n. Die Determinante der i-ten und der j-ten dieser drei Gleichungen

$$\cos\Theta_i \sin\Theta_j - \sin\Theta_i \cos\Theta_j = \sin(\Theta_j - \Theta_i)$$

nn nicht für alle drei Kombinationen (Θ_i, Θ_j) der drei Zahlen $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ rschwinden, da $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ untereinander verschieden und der Un-eichung $-P_{K1} \leqq \Theta_i < -P_{K1} + 2\pi$ unterworfen sind. Also muß

$$\cos d_{K\sigma} = G_\sigma,\quad \sin d_{K\sigma} = 0,$$

sbesondere also nach (47)

$$\frac{2K(\sigma-1)\pi}{k} = \eta_\sigma \pi$$

n, wo η_σ eine ganze Zahl ist. Aus der Bedingung $2K(\sigma-1) = \eta_\sigma k$ gt, daß $\eta_{\sigma+1} > \eta_\sigma$, $\eta_1 = 0$, d. h. $\eta_2 \geqq 1$, also $\eta_3 > \eta_2 \geqq 1$, d. h. $\eta_3 \geqq 2$, w., allgemein

$$\eta_\sigma \geqq \sigma - 1$$

n muß, wenn die Folge $\left\{\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}\right\}$ konvergieren soll. Weil $0 < K < \frac{k}{2}$ vor-sgesetzt war, ist aber

$$\eta_\sigma = \frac{2K}{k}(\sigma-1) < \sigma - 1$$

r $\sigma \geqq 2$. Für $\sigma \geqq 2$ ist also keine der Folgen $\left\{\frac{a_{\sigma n}}{a_{1n}}\right\}$ konvergent.

10. Abschließend können wir feststellen: Der in § 2 untersucht und der in § 3, Nr. 8 festgestellte sind die einzigen Fälle, in welche die Folgen $\left\{\begin{matrix} a_{\sigma n} \\ a_{1n} \end{matrix}\right\}$ ($\sigma = 2, 3, \ldots, k$) konvergieren und dann die in (angegebenen Grenzwerte haben. Sie liegen vor, wenn

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\lambda 0} \sqrt[k]{\frac{p}{q}}^{\lambda} \neq 0,$$

bzw. wenn k gerade und

$$p \neq \frac{1 + \sqrt[k]{r}}{r + \sqrt[k]{r}}$$

ist und als Ausgangswerte speziell die Zahlen

$$a_{\lambda 0} = \frac{(-1)^{\lambda}}{k} \sqrt[k]{r}^{\lambda} C$$

(C eine beliebige von Null verschiedene Konstante) gewählt sind. Be jeder anderen Wahl der Ausgangswerte $a_{10}, \ldots, a_{k0}$ ist das Eulersch Verfahren divergent oder überhaupt nicht durchführbar.

(Eingegangen am 6. Februar 1947.)

Über einfache Punkte von algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Neuerdings hat ABELLANAS[1]) für einfache Punkte einer algebraischen Mannigfaltigkeit Reihenentwicklungen der Koordinaten nach Ortsuniformisierenden hergeleitet und mit ihrer Hilfe bewiesen, daß meine Definition des Begriffes einfacher Punkt[2]) einer von ZARISKI[3]) gegebenen Definition äquivalent ist. Wir wollen nun zeigen, daß die Reihenentwicklung etwas einfacher hergeleitet werden kann, wenn man nach LIOUVILLE statt der einzelnen Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eine Linearkombination $u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n$ einführt und diese in eine Potenzreihe entwickelt. Mit derselben Methode zeigen wir, daß die Koordinaten eines allgemeinen Punktes von M differenzierbare Funktionen der Ortsuniformisierenden eines einfachen Punktes η sind, deren Ableitungen an der Stelle η endlich bleiben. Schließlich geben wir einen direkten Beweis für die Äquivalenz unserer Einfachheitsdefinition mit der von ZARISKI. Der Grundkörper wird immer als perfekt vorausgesetzt.

§ 1.

Herleitung der Potenzreihenentwicklung.

Wir gehen von der zugeordneten Form $F(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(d)})$ einer irreduziblen d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M in S_n aus.[4]) Sie ist ganzrational und symmetrisch in den Hyperebenen $u^{(0)}, \ldots, u^{(d)}$ und zerfällt als Funktion der $u = u^{(0)}$ in Primfaktoren, die den Schnittpunkten der Hyperebenen $u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}$ mit M entsprechen:

$$F(u; u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}) = \prod_{\nu} (u_0\xi_0^{(\nu)} + u_1\xi_1^{(\nu)} + \cdots + u_n\xi_n^{(\nu)}). \tag{1}$$

Ersetzen wir $u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}$ durch spezielle Hyperebenen, die die Mannigfaltigkeit M in endlich vielen Punkten $\eta^{(\nu)}$ schneiden, so gilt die Zerlegung (1) immer noch:

$$F(u; v^{(1)}, \ldots, v^{(d)}) = \prod_{\nu} (u_0\eta_0^{(\nu)} + u_1\eta_1^{(\nu)} + \cdots + u_n\eta_n^{(\nu)}) \tag{2}$$

[1]) P. ABELLANAS, Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **36**, 482—499 (1942).

[2]) Siehe etwa B. L. VAN DER WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie, § 38.

[3]) O. ZARISKI, Ann. of Math. (2) **40**, 639—689 (1939).

[4]) CHOW und VAN DER WAERDEN, ZAG 9, Math. Ann. **113**, (1937) S. 692.

und die $\eta^{(\nu)}$ erscheinen rechts mit ihren richtigen Vielfachheiten. Ist nun η ein einfacher Punkt von M und wählt man η als Koordinatenanfangspunkt $(1, 0, \ldots, 0)$, so kann man die Koordinaten so numerieren, daß die Hyperebenen $x_1 = 0, \ldots, x_d = 0$ mit dem Tangentialraum von M nur den Punkt η gemeinsam haben. Setzt man dann in (2) für $v^{(1)}, \ldots, v^{(d)}$ diese Hyperebenen $x_1 = 0, \ldots, x_d = 0$, so spaltet $F(u; v^{(1)}, \ldots, v^{(d)})$ einen einfachen Faktor u_0, dem einfachen Schnittpunkt $\eta = (1, 0, \ldots, 0)$ entsprechend, ab. Setzt man in (2) allgemeiner für $v^{(1)}, \ldots, v^{(d)}$ die Hyperebenen

$$x_1 - t_1 x_0 = 0,\ x_2 - t_2 x_0 = 0,\ \ldots,\ x_d - t_d x_0 = 0, \tag{3}$$

so erhält man aus (2) eine Form

$$F(u_0, \ldots, u_n;\ t_1, \ldots, t_d) = \prod_{\nu} (u_0 \eta_0^{(\nu)} + u_1 \eta_1^{(\nu)} + \cdots + u_n \eta_n^{(\nu)}), \tag{4}$$

die für $t_1 = \cdots = t_d = 0$ einen einfachen Faktor u_0 abspaltet:

$$F(u_0, \ldots, u_n;\ 0, \ldots. 0) = u_0 \cdot h(u_0, \ldots, u_n).$$

Nun wenden wir eine Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas an:

Lemma: *Wenn ein Polynom $F(u_0; t_1, \ldots, t_d)$ für $t_1 = \cdots = t_d = 0$ in zwei teilerfremde Faktoren $g(u_0) \cdot h(u_0)$ zerfällt, so zerfällt es für unbestimmte $t_1, \ldots, t_d$ in zwei Faktoren $G(u_0) \cdot H(u_0)$ deren Koeffizienten Potenzreihen in $t_1, \ldots, t_d$ sind und die für $t_1 = \cdots = t_d = 0$ in $g(u_0)$ und $h(u_0)$ übergehen, wobei $G(u_0)$ denselben Grad hat wie $g(u_0)$.*

Den Beweis dieses Lemmas findet man bei Abellanas; er verläuft genau so wie im Fall einer Veränderlichen t_1. Der Beweis ist übrigens besonders einfach in dem hier vorliegenden besonderen Fall $g(u_0) = u_0$, da man dann nur anzusetzen braucht

$$G(u_0) = u_0 - (P_1 + P_2 + \cdots)$$

wo $P_1, P_2, \ldots$ Polynome vom Grade 1, 2, ... in $t_1, \ldots, t_d$ sind und so bestimmt werden, daß die Potenzreihe $P_1 + P_2 + \cdots$ eine Nullstelle von $F(u_0; t_1, \ldots, t_d)$ wird:

$$F(P_1 + P_2 + \cdots;\ t_1, \ldots, t_d) = 0. \tag{5}$$

Entwickelt man in (5) beide Seiten nach Gliedern steigenden Grades in $t_1, \ldots, t_d$, so erhält man eine Reihe von Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} \alpha P_1 + Q_1 &= 0 \\ \alpha P_2 + \beta P_1^2 + \cdots &= 0 \\ \cdots\cdots & \end{aligned}$$

aus denen man sukzessiv $P_1, P_2, \ldots$ rational ausrechnen kann. Als Nenner erscheint dabei nur der Koeffizient α des Gliedes u_0 in $F(u_0; 0, \ldots, 0)$ der nach Voraussetzung nicht verschwindet.

Unser Beweis ergibt noch folgenden Zusatz: Enthält F außer u_0, och $u_1, \ldots, u_n$, so sind auch $P_1, P_2, \ldots$ rationale Funktionen von $_1, \ldots, u_n$.

In unserem Fall sind, wie sich aus der Zerlegung (4) ergibt, alle ullstellen von $F(u_0; t_1, \ldots, t_d)$ Linearformen in $u_1, \ldots, u_n$; also muß uch $P_1 + P_2 + \cdots$ eine Linearform in $u_1, \ldots, u_n$ sein:

$$P_1 + P_2 + \cdots = \sum_1^n - \xi_k u_k$$

o $\xi_1, \ldots, \xi_n$ natürlich wieder Potenzreihen in $t_1, \ldots, t_d$ sind. Setzt an noch $\xi_0 = 1$, so sieht man, daß das Polynom (4) einen Linearaktor

$$u_0 - (P_1 + P_2 + \cdots) = \xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \cdots + \xi_n u_n$$

at, wobei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ Potenzreihen in $t_1, \ldots, t_d$ sind, die für $t_1 = \cdots = t_d = 0$ in Null übergehen. Der Punkt ξ ist dabei einer von den chnittpunkten $\eta^{(\nu)}$ der Hyperebene (3) mit M; daraus folgt wegen $_0 = 1$ unmittelbar:

$$\xi_1 = t_1, \ \xi_2 = t, \ \ldots, \ \xi_d = t_d.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 1. *Die Mannigfaltigkeit M besitzt einen allgemeinen Punkt essen Koordinaten Potenzreihen in den „Ortsuniformisierenden“ $_1, \ldots, t_d$ sind, welche für $t_1 = 0, \ldots, t_d = 0$ in die Koordinaten des egebenen einfachen Punktes η übergehen, und zwar können bei geigneter Numerierung der Koordinaten mit der Normierung $\xi_0 = 1$ die rsten d Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_d$ selbst als Ortsuniformisierende verendet werden.*

§ 2.

Differentiation nach den Ortsuniformisierenden.

Wie wir sahen, hat $F(u_0, u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_d)$ als Polynom in u_0 ine einfache Nullstelle $\vartheta = -\xi_1 u_1 - \cdots - \xi_n u_n$. Da die Nullstelle einach ist, ist die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial u_1}(\xi) \neq 0$, und das bleibt richtig für $t_1 = 0, \ldots, _d = 0$. Demnach ist ϑ eine separable Funktion von $u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_d$ nd man kann die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t_k}(\vartheta)}{\frac{\partial F}{\partial u_0}(\vartheta)}$$

efinieren. Ersetzt man eine Unbestimmte u_i durch $u_i - 1$, bildet also

$$\vartheta + \xi_i = -\xi_1 u_1 - \cdots - \xi_i (u_i - 1) - \cdots - \xi_n u_n,$$

so ist $\vartheta + \xi_i$ ebenfalls eine separable, differenzierbare Funktion, und dasselbe gilt folglich von der Differenz

$$(\vartheta + \xi_i) - \vartheta = \xi_i.$$

Die partiellen Ableitungen der ξ_i nach den t_k existieren also sämtlich, und man kann sie als rationale Funktionen von $u_1, \ldots, u_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ darstellen, deren Nenner für $\xi = \eta$ nicht verschwinden:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_k} = \frac{g(u_1, \ldots, u_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)}{h(u_1, \ldots, u_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)}.$$

Die linke Seite hängt von $u_1, \ldots, u_n$ gar nicht ab. Ordnet man also rechts Zähler und Nenner nach Potenzprodukte der $u_1, \ldots, u_n$, so sind die Koeffizienten dieser Potenzprodukte proportional und man kann die linke Seite als Quotient irgend zweier solcher Koeffizienten darstellen.

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_k} = \frac{g_\nu(\xi)}{h_1(\xi)}. \tag{6}$$

Man kann diese Darstellung sogar so erwählen, daß der Nenner nicht Null wird für $\xi = \eta$:

$$h_1(\eta) \neq 0.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 2. *Die Koordinaten ξ_i sind separable algebraische Funktionen von den Ortsuniformisierenden t_k. Ihre partiellen Ableitungen lassen sich als Quotienten* (6) *so darstellen, daß der Nenner an der Stelle η nicht Null wird.*

§ 3.

Die Zariskische Definition eines einfachen Punktes.

Die Zariskische Definition heißt so: η ist ein einfacher Punkt der d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{m}$, wenn in dem Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ das zum Punkt η gehörige Primideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ sich als isolierte Primärkomponente eines Primideals mit einer d-gliedrigen Basis darstellen läßt:

$$(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_d) = [\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_r] \qquad \text{mit } \bar{\mathfrak{q}}_k \not\equiv 0 (\bar{\mathfrak{p}}). \tag{7}$$

Löst man die Restklassen nach $\mathfrak{m}$ in ihre Elemente auf, so kann man statt (7) auch schreiben

$$(\mathfrak{m}, f_1, \ldots, f_d) = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r] \qquad \text{mit } \mathfrak{q}_k \not\equiv 0 (\mathfrak{p}),$$

wobei $\mathfrak{p}$ das zum Punkt η gehörige Primideal ist:

$$\mathfrak{p} = (x_1 - \eta_1, \ldots, x_n - \eta_n).$$

Dazu ist nach Mod. Alg. II, § 96 notwendig und hinreichend, daß in dem Ideal $(\mathfrak{m}, f_1, \ldots, f_d)$ solche Formen vorkommen, deren Tangentialhyperebenen im Punkt η nur den Punkt η gemeinsam haben. Wenn

s der Fall ist, so hat der Punkt η als Schnittpunkt von M mit den ɣperflächen $f_1 = 0, \ldots, f_d = 0$ nach einem bekannten Kriterium (ZAG 5. ath. Ann. 110, oder Einf. alg. Geom. § 39) die Multiplizität Eins. so ist η dann auch ein einfacher Punkt in unserem Sinne.

Nun sei umgekehrt η ein einfacher Punkt in unserem Sinne. Wir ihlen für η wieder den Koordinatenanfangspunkt und numerieren e Koordinaten so, daß die Hyperebenen $x_1 = 0, \ldots, x_d = 0$ mit dem ngentialraum von M nur den Punkt η gemeinsam haben. Der Tanntialraum S_d war (Einf. alg. Geom. § 40) definiert als Durchschnitt er Tangentialhyperebenen von Hyperflächen durch M. Unter diesen ngentialhyperebenen gibt es $n-d$ linear Unabhängige, deren Durchhnitt genau S_d ist. Diese seien etwa die Tangentialhyperebenen der ɣperflächen $f_{d+1} = 0, \ldots, f_n = 0$.

Weiter setzen wir $f_1 = x_1, \ldots, f_d = x_d$. Dann haben die Tangenlhyperebenen der Hyperflächen $f = 0, \ldots, f_d = 0, f_{d+1} = 0, \ldots,$ $= 0$ im Punkt η nur den Punkt η miteinander gemeinsam. Daraus lgt nach dem zitierten Satz (Mod. Alg. II, § 96), daß $\mathfrak{p} = (x_1, \ldots, x_n)$ ne isolierte Primärkomponente des Ideals $(\mathfrak{m}, f_1, \ldots, f_d)$ ist, d. h. η einfach im Sinne der Definition von Zariski.

(Eingegangen am 5. März 1945.)

Birationale Transformation von linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Einleitung.

Wenn man die grundlegenden Abhandlungen der italienischen Schule über die Geometrie auf einer algebraischen Fläche liest, wo von linearen Scharen und Vollscharen, von virtuellen und effektiven Multiplizitäten von Basispunkten die Rede ist, so kommt man zwangsläufig auf die Frage, wie man die darin vorkommenden Begriffe einfach, exakt und verallgemeinerungsfähig fassen könnte. Die Lösung dieses Problems kann ich heute vorlegen. Sie beruht auf der Bewertungstheorie.

Es ist leicht, eine lineare Schar von Kurven ohne feste Bestandteile auf einer algebraischen Fläche bei einer birationalen Transformation so zu transformieren, daß die transformierte Schar wieder eine lineare Schar ohne feste Bestandteile ist. Aber nun stößt man auf die paradoxe Erscheinung, daß eine Vollschar nicht ohne weiteres in eine Vollschar übergeht. Bei einer quadratischen Transformation der Ebene z. B.:

$$x_0 : x_1 : x_2 = x_1' x_2' : x_2' x_0' : x_0' x_1'$$

geht die lineare Schar aller Geraden der Ebene

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$$

in eine Kegelschnittschar mit 3 Basispunkten

$$\lambda_0 x_1' x_2' + \lambda_1 x_2' x_0' + \lambda x_0' x_1' = 0$$

über, die offensichtlich keine Vollschar ist, da sie sich zur fünfgliedrigen Schar aller Kegelschnitte der Ebene erweitern läßt.

Um die Situation zu retten, muß man den Begriff einer *linearen Schar mit vorgegebenen Basispunkten* einführen. Schreibt man nämlich in unserem Beispiel den Kegelschnitten der Schar ihre drei festen Punkte vor, so ist die Schar vollständig. In anderen Fällen muß man vorschreiben, daß die Kurven der Schar in einem Basispunkt eine gegebene Tangente haben oder durch gegebene Punkte doppelt oder dreifach hindurchgehen sollen.

Nun kann es vorkommen, daß die Kurven einer linearen Schar in einem Basispunkt effektiv eine höhere Multiplizität haben als die vorgeschriebene; daher unterscheidet man zwischen der *effektiven* und

r *virtuellen* (vorgeschriebenen) Multiplizität. Ist die effektive Multi-izität eines Basispunktes größer als die virtuelle, so muß man, wenn eser Basispunkt durch eine birationale Transformation in eine Kurve ergeführt wird, nach ENRIQUES[1]) diese Kurve als festen Bestandteil sämtlichen Kurven der transformierten Schar hinzunehmen, mit einer ielfachheit gleich der Übermultiplizität, d. h. gleich der Differenz von fektiver und virtueller Multiplizität vor der Transformation.

Will man diese Begriffe erschöpfend erklären, so muß man nicht ur gewöhnliche Basispunkte, sondern auch unendlich benachbarte Betracht ziehen. Die Angelegenheit wird dann alsbald so kompliziert, aß eine Verallgemeinerung auf mehr als 2 Dimensionen fast aussichts-s erscheint. Jedoch gelingt diese Verallgemeinerung durch den *ewertungsbegriff*. Dieser bildet einen vollständigen Ersatz für den egriff des unendlich benachbarten Punktes und macht jedes Eingehen uf die Struktur dieser Nachbarpunkte überflüssig. Er ermöglicht eine rational invariante Theorie der linearen Scharen und Vollscharen uf algebraischen Mannigfaltigkeiten, wie in § 4—8 auseinandergesetzt erden soll.

Vorher möge in enger Anlehnung an KÄHLER[2]) eine einfachere Art, rationale Invarianten zu gewinnen, behandelt werden, die den Be-ertungsbegriff noch nicht voraussetzt. Beide Theorien beruhen auf nem Satz über Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit, den wir jetzt rleiten wollen.

§ 1.

Ein Satz über rationale Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit.

Das folgende Lemma gehört dem Gedankenkreis des NOETHERschen undamentalsatzes an:

Lemma. *Ist M eine glatte (d. h. singularitätenfreie) d-dimensionale annigfaltigkeit und sind alle Schnittbestandteile von M mit einer yperfläche $f = 0$ mit mindestens derselben Vielfachheit auch in dem chnitt von M mit einer zweiten Hyperfläche $F = 0$ enthalten, so lt eine Identität*

$$x_0^g F = Qf + R$$

obei die Hyperfläche $R = 0$ die Mannigfaltigkeit M enthält.

Beweis. Die Gesamtheit aller Formen G, deren Produkt mit F ch in der gewünschten Weise darstellen läßt:

$$GF = Qf + R$$

ein H-Ideal. Wenn wir beweisen können, daß dieses H-Ideal keine

[1]) Siehe Enzyklopaedie d. math. Wiss. III C 6b und die dort angeführte teratur.

[2]) E. KÄHLER, Forme differenziali e funzioni algebriche, Mem. Accad. Ital. Mat. 3, 1—19.

Nullstelle außer der trivialen $(0, \ldots, 0)$ besitzt, so sind wir fertig. Daraus folgt nämlich nach dem Hilbertschen Nullstellensatz, daß eine geeignete Potenz von x_0 in dem H-Ideal enthalten ist, also (1) gilt.

Es sei also P ein Punkt des Raumes. Wir haben dann zu beweisen, daß es in dem H-Ideal eine Form G gibt, die in P nicht Null wird. Das bedeutet nämlich, daß P keine Nullstelle des H-Ideals ist.

Wenn P nicht auf M liegt, so gibt es eine Form G, die auf M überall Null wird, aber nicht in P. Dann ist auch GF Null auf M, wir können also

$$GF = R = 0 \cdot f + R$$

setzen und schließen, daß die Form G zum H-Ideal gehört. Damit ist dieser Fall erledigt: von jetzt an liege P auf M.

Es sei S_{n-d-1} ein linearer Raum, der weder M noch den Tangentialraum von M in P trifft. Beide Forderungen sind erfüllt, wenn S_{n-d-1} *allgemein* gewählt wird, und das wollen wir auch mit Rücksicht auf den folgenden Beweis tun.

Dann wird der Verbindungsraum S_{n-d} von S_{n-d-1} mit P die Mannigfaltigkeit M nur in endlich vielen Punkten treffen, unter denen P mit der Multiplizität 1 vorkommt. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß S_{n-d-1} die Gleichungen $x_0 = 0, x_1 = 0, \ldots, x_d = 0$ hat.

Für unbestimmte $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d$ hat der durch S_{n-d-1} gehende lineare Raum

$$x_0\xi_1 - x_1\xi_0 = 0,\ x_0\xi_2 - x_2\xi_0 = 0,\ \ldots,\ x_0\xi_d - x_d\xi_0 = 0$$

ebenfalls nur endlich viele Schnittpunkte mit M. Diese Punkte $\xi^{(\nu)} = (\xi_0, \ldots, \xi_d, \xi_{d+1}^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)})$ sind dann allgemeine Punkte von M, also in Bezug auf den Körper k der rationalen Funktionen von $\xi_0, \ldots, \xi_d$ konjugiert. Einer von ihnen heiße ξ. Alle seine Koordinaten $\xi_0, \ldots, \xi_n$ sind dann ganze algebraische Funktionen der Unbestimmten $\xi_0, \ldots, \xi_d$, und der Grad des Körpers $k(\xi)$ über k ist gleich dem Grad γ der Mannigfaltigkeit M.

In diesem Körper bilden wir nun die Normen $n(\xi)$ und $N(\xi)$ der Körperelemente $f(\xi)$ und $F(\xi)$. Aus der Definition

$$N(\xi) = \prod_{\nu=1}^{\gamma} F(\xi^{(\nu)})$$

folgt leicht, daß $N(\xi)$ ein homogenes Polynom in $\xi_0, \ldots, \xi_d$ vom Grade $\beta\gamma$ ist, wo β der Grad der Form F ist. Ebenso ist $n(\xi)$ homogen in $\xi_0, \ldots, \xi_d$.

Wir wollen nun *erstens* zeigen, daß $n(\xi)$ durch $f(\xi)$ und $N(\xi)$ durch $F(\xi)$ teilbar ist:

$$n(\xi) = g(\xi) f(\xi) \tag{2}$$

$$N(\xi) = G(\xi) F(\xi). \tag{3}$$

eitens, daß die Form N durch n teilbar ist:

$$N(\xi) = A(\xi)\, n(\xi)$$

ittens, daß die in (3) vorkommende Form G im Punkte P nicht ll wird:

$$G(P) \neq 0.$$

Aus (2), (3), (4) folgt:

$$G(\xi)\, F(\xi) = A(\xi)\, g(\xi)\, f(\xi)$$

er, wenn $A \cdot g = Q$ gesetzt wird,

$$G(\xi)\, F(\xi) - Q(\xi)\, f(\xi) = 0.$$

Folglich ist $R = GF - Qf$ Null auf M und wir haben

$$GF = Qf + R.$$

Somit gehört G zum H-Ideal, womit alles bewiesen ist. Also brauchen r nur noch (2), (3), (4), (5) zu beweisen.

$F(\xi)$ genügt einer algebraischen Gleichung vom Grade γ, deren ztes Glied gerade $N(\xi)$ ist:

$$F(\xi)^{\gamma} + a_1 F(\xi)^{\gamma-1} + \ldots + a_{\gamma-1} F(\xi) \pm N(\xi) = 0$$

Löst man $N(\xi)$ aus dieser Gleichung auf, so erhält man gerade e Gleichung (3). Ebenso beweist man (2).

Um (4) zu beweisen, müssen wir die Hyperflächen $N = 0$ und $= 0$ näher charakterisieren. Wir behaupten:

A. Die Hyperfläche $N = 0$ ist der projizierende Kegel des Durchhnittes von $F = 0$ mit M aus dem linearen Raum S_{n-d-1}, und ihre reduziblen Bestandteile haben dieselben Vielfachheiten wie die entrechenden Bestandteile dieses Durchschnittes. Entsprechend verhält ch $n = 0$ zu $f = 0$.

Nehmen wir diese Behauptung für einen Augenblick als bewiesen , so folgt daraus, da die irreduziblen Bestandteile des Durchschnittes n $f = 0$ mit M mit mindestens derselben Vielfachheit auch im rchschnitt von $F = 0$ mit M enthalten sind, daß der projizierende egel $n = 0$ in dem projizierenden Kegel $N = 0$ enthalten ist. Also die Form $N(x)$ durch $n(x)$ teilbar, womit (4) bewiesen ist.

Aber auch (5) folgt jetzt leicht. Nach ZAG 14, § 5 (Math. Anm. **5**, S. 635) setzt der Durchschnitt des projizierenden Kegels $N = 0$ t M sich zusammen aus dem Durchschnitt von $F = 0$ mit M und em Restschnitt S, der den Punkt P nicht enthält. Nun folgt aus (3), ß $N - GF$ Null ist auf M, also ist der Durchschnitt von $N = 0$ t M derselbe wie der von $GF = 0$ mit M, also zusammengesetzt s dem Durchschnitt von $F = 0$ mit M und dem von $G = 0$ mit M. so ist der Restschnitt S genau der Durchschnitt der Hyperfläche $= 0$ mit M. Da P nicht zu diesem Durchschnitt gehört, ist $G(P) \neq 0$.

Es kommt also nur noch darauf an, die Behauptung A für beliebige Hyperflächen $F = 0$ zu beweisen. Es sei also I ein irreduzibler Bestandteil des Durchschnittes von $F = 0$ mit M mit der Vielfachheit μ, und es sei K der projizierende Kegel von I, d. h. die Gesamtheit aller Punkte, deren Verbindungsraum mit S_{n-d-1} einen Punkt von I enthält. Wir haben zu beweisen, daß K mit derselben Vielfachheit μ in $N = 0$ enthalten ist.

Die Form $N(x)$ hängt nur von $x_0, \ldots, x_d$ ab. Zerlegen wir sie in irreduzible Faktoren

$$N(x) = N_1 N_2 \ldots N_h,$$

so hängen auch diese Faktoren nur von $x_0, \ldots, x_d$ ab. Wenn also ein Punkt Q von M einer Hyperfläche $N_i(x) = 0$ angehört, so gehört auch der ganze Verbindungsraum von Q mit S_{n-d-1} der Hyperfläche $N_i(x) = 0$ an, und wenn die irreduzible Mannigfaltigkeit I einer Hyperfläche $N_i(x) = 0$ angehört, so gehört der ganze irreduzible Verbindungskegel K dieser Hyperfläche an, also ist dann K mit dieser Hyperfläche $N_i = 0$ identisch.

Aus (3) folgt, wie schon bemerkt, daß $N = 0$ dieselbe Schnittmannigfaltigkeit mit M hat wie $GF = 0$. In dieser Schnittmannigfaltigkeit ist I als Bestandteil enthalten, und zwar mindestens mit der Multiplizität μ. Also muß mindestens einer von den irreduziblen Bestandteilen $N_i = 0$ die Mannigfaltigkeit I enthalten, und zwar müssen so viele von ihnen I enthalten, daß insgesamt mindestens die Schnittmultiplizität μ herauskommt. Wir haben aber gesehen, daß die Hyperflächen $N_i = 0$, die I enthalten, mit dem Kegel K identisch sind. Also muß der Kegel K so oft als Bestandteil in $N = 0$ enthalten sein, daß insgesamt die Schnittmultiplizität μ für I herauskommt.

Nun folgt aber aus dem angeführten Satz ZAG 14, § 5, daß I nur einmal gezählt als Bestandteil in dem Durchschnitt von M und K enthalten ist. Also muß der Kegel K mindestens μ mal in der Hyperfläche $N = 0$ enthalten sein, damit die erforderliche Schnittmultiplizität μ herauskommt.

Jetzt müssen wir noch zeigen, daß K nicht mehr als μ mal als Bestandteil in der Hyperfläche $N = 0$ enthalten ist.

Der Durchschnitt von $F = 0$ und M hat, wenn seine irreduziblen Bestandteile I mit ihren Vielfachheiten μ gezählt werden, den Grad $\beta\gamma$. Also hat auch der projizierende Kegel dieses Durchschnittes, wenn seine irreduziblen Bestandteile K mit ebendenselben Vielfachheiten μ gezählt werden, den Grad $\beta\gamma$. Die Hyperfläche $N = 0$ hat aber auch nur den Grad $\beta\gamma$. Also kann sie die Kegel K nicht öfter als je μ mal als Bestandteile enthalten. Damit ist die Behauptung A bewiesen und der Beweis des Lemmas beendet.

Wir betrachten nun rationale Funktionen auf M

$$\varphi(\xi_0, \ldots, \xi_n) = \frac{f(\xi_0, \ldots, \xi_n)}{g(\xi_0, \ldots, \xi_n)}$$

ξ ein allgemeiner Punkt von M ist und wo f und g Formen gleichen ades sind. Die λ-Stellen dieser Funktion werden durch die Gleichung

$$f - \lambda g = 0$$

geben. Statt dessen kann man, wenn $\lambda = -\lambda_2 : \lambda_1$ gesetzt wird ch schreiben

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0.$$

ese Gleichung definiert eine lineare Schar von Mannigfaltigkeiten $_{-1}$ auf M. Die festen Bestandteile dieser linearen Schar können ßer Betracht bleiben. Die übrig bleibenden Teile definieren die *veaumannigfaltigkeiten* der Funktion φ, insbesondere für $\lambda_2 = 0$ e *Nullmannigfaltigkeit* und für $\lambda_1 = 0$ die *Polmannigfaltigkeit* von φ le diese sind rein $(d-1)$-dimensial, und jeder ihrer irreduziblen Beandteile hat eine wohldefinierte Vielfachheit. Die Vielfachheit eines eduziblen Bestandteils $\mathfrak{P}$ in der Polmannigfaltigkeit z. B. ist gleich r Vielfachheit von $\mathfrak{P}$ als Bestandteil der Schnittmannigfaltigkeit von $= 0$ mit M, vermindert um das Minimum der Vielfachheiten von $\mathfrak{P}$ Bestandteil der Schnittmannigfaltigkeiten von $f = 0$ und $g = 0$ t M.

Satz 1. *Wenn ein Punkt P von M nicht auf der Polmannigltigkeit der Funktion $\varphi = \frac{f}{g}$ liegt, so kann man den Nenner g so ihlen, daß er nicht Null wird im Punkte P.* Man sagt dann, daß die nktion φ *endlich bleibt* in P.

Beweis. Die Hyperflächen $f = 0$ und $g = 0$ mögen aus M Schnittnnigfaltigkeiten AC und BC ausschneiden, wobei B die Polmannigtigkeit von φ ist, zu der P nach Voraussetzung nicht gehört. Wir nken uns die Numerierung der Koordinaten so, daß $x_0 \neq 0$ in P. n legen wir durch die Mannigfaltigkeit B eine Hyperfläche $G = 0$, nicht durch P geht. Sie möge M in BD schneiden. Die Hyperfläche $= 0$ schneidet dann M in $ABCD$. Da diese Schnittmannigfaltigit BC als Bestandteil enthält, so folgt nach dem Lemma

$$x_0^\varrho f G = Q g + R$$

o

$$\xi_0^\varrho f(\xi) G(\xi) = Q(\xi) g(\xi)$$

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{Q(\xi)}{\xi_0^\varrho G(\xi)}$$

bei $x_0^\varrho G(x)$ im Punkte P nicht Null wird.

Ich habe an anderer Stelle[3]) ausgeführt, daß es in jedem einfachen nkt P von M ein System von Ortsuniformisierenden $u_1, \ldots, u_d$ gibt, dem Körper der rationalen Funktionen auf M angehören und für man sogar geeignete Verhältnisse wie $\xi_0^{-1}\xi_k$ wählen kann, derart,

[3]) In der vorangehenden Arbeit, Über einfache Punkte von algebraischen nnigfaltigkeiten.

daß, wenn etwa $\xi_0 = 1$ normiert wird, alle Ableitungen $\frac{d\xi_i}{du_j}$ an de Stelle P endlich bleiben. Bei geeigneter Numerierung der Koordinate sind $\xi_0^{-1}\xi_1, \xi_0^{-1}\xi_2, \ldots, \xi_0^{-1}\xi_d$ Ortsuniformisierende für alle Punkte von M mit Ausnahme einer höchstens $(d-1)$-dimensionalen Teilmannig faltigkeit.

Satz 2. *Wenn $u_1, \ldots, u_d$ Ortsuniformisierende für P sind und wen eine rationale Funktion φ an der Stelle P endlich bleibt, so bleibe auch alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$ an der Stelle P endlich.*

Beweis. Nach Satz 1 ist φ als Quotient

$$\varphi = \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{g(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)}$$

darstellbar, wobei $g(P) \neq 0$ ist. Nach der Regel für totale Differen tiation ist nun

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\right)\frac{\partial \xi}{\partial u_j} = \sum_k \frac{g(\xi)\,\partial_k f(\xi) - f(\xi)\,\partial_k g(\xi)}{g(\xi)^2}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_i}$$

Rechts bleibt alles endlich an der Stelle P, also bleibt auch die link Seite endlich für P.

§ 2.

Die Kählerschen Tensoren.

Die inhomogenen Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eines allgemeinen Punkte einer glatten d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M seien separabl algebraische Funktionen von $\xi_1, \ldots, \xi_d$. Es sei weiter $\varphi_{\lambda\mu\ldots\pi}$ ei System von rationalen Funktionen auf M, wobei jede der Indice $\lambda\mu\ldots\pi$ von 1 bis d läuft. Ein solches System heißt ein *Tensor* auf M, und die $\varphi_{\lambda\mu\ldots\pi}$ heißen die *Komponenten* des Tensors in Bezu auf $\xi_1, \ldots, \xi_d$.

Die Tensorkomponenten können Symmetriebedingungen von der Ar

$$\sum_S \alpha_S S\,\varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} = 0$$

unterworfen werden, wo die α_S Konstante und die S Permutatione der Indices sind; z. B. kann verlangt werden, daß die Tensoren sym metrisch oder antisymmetrisch sind. Ein antisymmetrischer oder alte nierender Tensor mit s Indices definiert ein s-faches Differential auf M

$$dw = \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi}\, d\xi_\lambda\, d\xi_\mu \ldots d\xi_\pi \tag{1}$$

wobei über jeden zweimal vorkommenden Index summiert wird.

Sind $u_1, \ldots, u_d$ Ortsuniformisierende eines Punktes, sodaß alle differenzierbare Funktionen von $u_1, \ldots, u_d$ sind, so werden die Kom

nenten des Tensores φ in Bezug auf $u_1, \ldots, u_d$ durch

$$\varphi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial u_\beta} \cdots \frac{\partial \xi_\pi}{\partial u_\varepsilon}$$

finiert, wobei wieder über jeden zweimal vorkommenden Index zu mmieren ist.

Die Transformationsformel (2) ist transitiv: transformiert man den nsor φ zuerst auf $u_1, \ldots, u_d$, dann weiter auf $v_1, \ldots, v_d$, so erhält an dasselbe Ergebnis wie wenn man direkt auf $v_1, \ldots, v_d$ trans-rmiert:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha'\beta'\ldots\varepsilon'} &= \sum \varphi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha}{\partial v_{\alpha'}} \cdots \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v_{\varepsilon'}} \\
&= \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \left(\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial v_{\alpha'}}\right)\left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial u_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial v_{\beta'}}\right) \cdots \left(\frac{\partial \xi_\pi}{\partial u_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v_{\varepsilon'}}\right) \\
&= \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial v_{\alpha'}} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial v_{\beta'}} \cdots \frac{\partial \xi_\pi}{\partial v_{\varepsilon'}} .
\end{aligned}$$

Ein Vektor φ heißt *endlich in P*, wenn nach Transformation auf e Ortsuniformisierenden des Punktes P die Vektorkomponenten alle P endlich bleiben. Diese Eigenschaft ist von der Wahl der Orts-iformisierenden unabhängig. Denn wenn in (3) die $\varphi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ alle endlich eiben in P und $u_1, \ldots, u_d$ ebenso, so bleiben nach Satz 2 auch die bleitungen $\frac{\partial u_\alpha}{\partial v_{\alpha'}}$ usw. endlich in P, also die ganze rechte Seite von) und somit auch die linke. Ebenso beweist man durch Vertauschung r u_α und $v_{\alpha'}$, daß aus der Endlichkeit der $\varphi_{\alpha'\beta'\ldots\varepsilon'}$ die der $\varphi_{\alpha\beta\ldots}$ gt.

Ist ein Tensor φ nicht endlich in P, so geht mindesten eine irre-zible Polmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ von einer Funktion $\varphi_{\varkappa\lambda\ldots\nu}$ durch P. k die höchste Vielfachheit von $\mathfrak{P}$ als Bestandteil einer Polmannig-ltigkeit einer Tensorkomponente $\varphi_{\varkappa\lambda\ldots\nu}$, so zählt $\mathfrak{P}$ als *Polmannig-ltigkeit von der Vielfachheit k des Tensors* φ. Man beweist wie en aus (3), daß diese Vielfachheit von der Wahl der Ortsuniformi-erenden des Punktes P unabhängig ist.

Die Vielfachheit k ändert sich aber auch nicht, wenn P durch einen gemeinen Punkt der Polmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ ersetzt wird; denn die tsuniformisierenden des Punktes P sind gleichzeitig Ortsuniformi-erende des allgemeinen Punktes. Daraus folgt, daß die eben difinierte elfachheit nicht von der Wahl des Punktes P, sondern nur von $\mathfrak{P}$ hängt.

Jeder Tensor hat nur endlich viele Polmannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}$. Denn enn man zunächst wieder ein bestimmtes System von unabhängigen ränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_d$ dem Funktionenkörper zugrunde legt, so

können alle Vektorkomponenten $\varphi_{\lambda\mu\ldots\pi}$ als Brüche $f_{\lambda\mu\ldots\pi}(\xi) : g(\xi$ mit einem und demselben Hauptnenner $g(\xi)$ geschrieben werden. Al Punkte der Polmannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}$ kommen nun erstens diejenige in Betracht, in denen $g = 0$ wird, zweitens diejenigen, für die $\xi_1, \ldots, \xi$ nicht Ortsuniformisierende sind. Diese zwei Arten von Punkten ver teilen sich aber auf je endlich viele $(d-1)$-dimensionale irreduzibl Mannigfaltigkeiten.

Wir fassen zusammen: *Jeder Tensor besitzt eine rein* $(d-1)$*-di mensionale Polmannigfaltigkeit, bestehend aus endlich vielen irre duziblen Bestandteilen* $\mathfrak{P}$ *mit bestimmten Vielfachheiten. Außerhalb vo dieser Polmannigfaltigkeit bleibt der Tensor in jedem Punkt endlich*

Fehlt die Polmannigfaltigkeit, so heißt der Tensor *überall endlich* Die überall endlichen alternierenden Tensoren s-ter Stufe definiere nach (1) die *überall endlichen s-fachen Differentiale* der Mannigfaltig keit M.

§ 3.

Transformation der Tensoren.

Ist eine Mannigfaltigkeit M' rational auf M abgebildet, so entsprich jedem allgemeinen Punkt ξ' von M' ein allgemeiner Punkt ξ von M

$$\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n = F_0(\xi') : F_1(\xi') : \ldots : F_n(\xi').$$

Bekanntlich wird die rationale Abbildung von M' auf M durch ein lineare Schar $\{C_\lambda\}$ vermittelt, die man erhält, wenn man die Formen schar

$$F_\lambda = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_n F_n$$

mit M' schneidet und den von λ unabhängigen Teil D der Schnitt mannigfaltigkeit wegläßt. Die Fundamentalpunkte der Abbildung sin die Basispunkte der Schar; sie bilden eine höchstens $(d-2)$-dimen sionale Teilmannigfaltigkeit B' von M'. Allen anderen Punkten von M entspricht, wenn M' glatt ist, nur ein Bildpunkt auf M[4]).

Einem Tensor φ auf M entspricht ein Tensor φ' auf M' vermög der Transformationsformel

$$\varphi'_{\lambda'\mu'\ldots\pi'} = \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial \xi'_{\lambda'}} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \xi'_{\mu'}} \cdots \frac{\partial \xi_\pi}{\partial \xi'_{\pi'}}.$$

Dabei soll wieder $\xi_0 = \xi'_0 = 1$ sein, alle ξ_i separable Funktionen vo $\xi_1, \ldots, \xi_d$ und alle ξ'_i separable Funktionen von $\xi'_1, \ldots, \xi'_d$. Sin $u_{1'}, \ldots, u_{d'}$ Ortsuniformisierende auf M', so werden die Komponente von φ in Bezug auf sie durch

[4]) Siehe etwa B. L. v. d. Waerden, ZAG **6**, Math. Anm. **110**, § 6.

$$\varphi'_{\alpha'\beta'\ldots\varepsilon'} = \sum \varphi'_{\lambda'\mu'\ldots\pi'} \frac{\partial \xi'_{\lambda'}}{\partial u'_{\alpha'}} \cdots \frac{\partial \xi'_{\pi'}}{\partial u'_{\varepsilon'}}$$

$$= \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \left(\frac{\partial \xi'_{\lambda'}}{\partial u'_{\alpha'}} \frac{\partial \xi_{\lambda}}{\partial \xi'_{\lambda'}}\right) \cdots \left(\frac{\partial \xi'_{\pi'}}{\partial u'_{\varepsilon'}} \frac{\partial \xi_{\pi}}{\partial \xi'_{\pi'}}\right)$$

$$= \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\pi} \frac{\partial \xi_{\lambda}}{\partial u'_{\alpha'}} \cdots \frac{\partial \xi_{\pi}}{\partial u'_{\varepsilon'}}$$

egeben.

Wir beweisen nun nach KÄHLER:

Satz 3. *Wenn der Tensor φ auf M überall endlich ist, so ist auch auf M' überall endlich.*

Beweis. Gesetzt, φ' hätte auf M' eine Polmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}'$. ir wählen auf $\mathfrak{P}'$ einen Punkt P', der nicht Fundamentalpunkt der bbildung ist. Das ist möglich, weil $\mathfrak{P}'$ die Dimension $d-1$ hat. Für en Bildpunkt P auf M können wir $p_0 \neq 0$ annehmen. Dann bleiben e Funktionen

$$\xi_i = \frac{\xi_i}{\xi_0} = \frac{F_i(\xi')}{F_0(\xi')}$$

n Punkt P' alle endlich. Wir können die Veränderliche so numerieren aß $\xi_1, \ldots, \xi_d$ Ortsuniformisierende für P sind. $u'_1, \ldots u'_{d'}$ seien Ortsniformisierende für P'. Dann bleiben in der Formel

$$\varphi'_{\alpha'\beta'\ldots\varepsilon'} = \sum \varphi_{\lambda\mu\ldots\varkappa} \frac{\partial \xi_{\lambda}}{\partial u'_{\alpha'}} \frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial u'_{\beta'}} \cdots \frac{\partial \xi_{\pi}}{\partial u'_{\varepsilon'}}$$

le Größen rechter Hand endlich an der Stelle P'. Also bleibt auch e linke Seite endlich, q. e. d.

Ist die Abbildung birational, so folgt auch umgekehrt aus der ndlichkeit von φ' die von φ. Die überall endlichen Tensoren mit egebenen Symmetriebedingungen bilden also jeweils eine birational variante lineare Schar. Insbesondere gilt das von den ein- bis d-fachen ifferentialen 1. Gattung. Auch die Dimensionen dieser linearen Scharen nd birational invariant. Daraus folgt speziell die Invarianz des geoetrischen Geschlechtes p_g und der Irregularität $p_g - p_a$ einer algebrachen Fläche, der Mehrgeschlechter usw.

§ 4.

Bewertungen und Primdivisoren.

Es sei wieder M eine glatte, irreduzible Mannigfaltigkeit von der imension d. Die Teilmannigfaltigkeiten von M bezeichnen wir fortan s *Teile* von M, insbesondere die rein $(d-1)$-dimensionalen als *Höchstile*, die höchstens $(d-2)$-dimensionalen als *niedere Teile*.

Jedes irreduzible Höchstteil (*Primhöchstteil*) $\mathfrak{P}$ von M definiert eine ewertung des zu M gehörigen Funktionenkörpers. Ist nämlich ξ ein

allgemeiner Punkt von M und

$$\varphi = \frac{f(\xi_0, \ldots, \xi_n)}{g(\xi_0, \ldots, \xi_n)}$$

eine rationale Funktion auf M, so schneiden die Hyperflächen $f = 0$ und $g = 0$ aus M gewisse Höchstteile aus. Wenn nun $\mathfrak{P}$ darin mit den Vielfachheiten a und b vorkommt, so wird der Wert von φ in der zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Bewertung durch

$$w(\varphi) = a - b$$

definiert. Wird dieselbe Funktion noch in anderer Weise dargestellt

$$\varphi = \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f_1(\xi)}{g_1(\xi)},$$

so ist $fg_1 - f_1 g$ Null auf M, also schneidet fg_1 denselben Höchstteil aus M aus wie $f_1 g$, also ist $a + b_1 = a_1 + b$, also $a - b = a_1 - b_1$.

Die Bewertungseigenschaften

$$w(\varphi\psi) = w(\varphi) + w(\psi),$$
$$w(\varphi + \psi) \geqq \text{Min}\,\{w(\varphi), w(\psi)\}$$

sind erfüllt. Die erste ist selbstverständlich, die letzte folgt daraus, daß jede Hyperfläche der linearen Schar $\lambda_1 f_1 g_2 + \lambda_2 f_2 g_1 = 0$, insbesondere die Hyperfläche $f_1 g_2 + f_2 g_1 = 0$, die Mannigfaltigkeit M in $\mathfrak{P}$ mit mindestens dieselbe Vielfachheit schneidet, wie die kleinste der beiden Schnittvielfachheiten der Basishyperflächen $f_1 g_2 = 0$ und $f_2 g_1 = 0$ (vgl. etwa meine Einführung in die algebr. Geometrie, § 44, Satz 4).

Die so definierten Bewertungen heißen im zweidimensionalen Fall *Kurvenprimdivisoren*; im allgemeinen Fall nennen wir sie *höhere Primdivisoren*. Wir bezeichnen sie mit großen deutschen Typen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots$. Wir unterscheiden nicht zwischen dem Höchstteil $\mathfrak{P}$ (speziell auf einer Fläche: der Kurve $\mathfrak{P}$) und dem durch ihn bestimmten Primdivisor $\mathfrak{P}$.

Unter einem (höheren) *Divisor* $\mathfrak{D}$ verstehen wir nunmehr eine endliche Gesamtheit von höheren Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ mit beliebigen ganzzahligen Exponenten $e_1, \ldots, e_r$, die auch negativ sein dürfen und schreiben

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \mathfrak{P}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{P}_r^{e_r}$$

Sind alle Exponenten $e_1, \ldots, e_r \geqq 0$, so heißt der Divisor $\mathfrak{D}$ *ganz*. Wir unterscheiden nicht zwischen dem ganzen Divisor $\mathfrak{D}$ und dem entsprechenden Höchstteil von M, bestehend aus den Primhöchstteilen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ mit den Vielfachheiten $e_1, \ldots, e_r$.

Das *Produkt* von zwei Divisoren wird, wie man sich denken kann, durch Addition der Exponenten gebildet. Bei dieser Produktdefinition bilden die Divisoren $\mathfrak{D}$ offensichtlich eine Abelsche Gruppe. Das Einselement dieser Gruppe ist der leere Divisor $\mathfrak{E} = \mathfrak{P}^0$.

Zu jeder Funktion φ gehört ein Divisor $(\varphi) = \mathfrak{B}\mathfrak{C}^{-1}$, wobei $\mathfrak{B}$ die Nullmannigfaltigkeit und $\mathfrak{C}$ die Polmannigfaltigkeit von φ ist.

Außer den höheren Primdivisoren brauchen wir noch andere Bertungen, die durch birationale Transformation in höhere Primdiviren übergehen können. Zunächst ein Beispiel!

Ein einfacher Punkt P einer algebraischen Fläche M definiert eine wertung $\mathfrak{p}$. Ist nämlich wie oben

$$\varphi = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

d hat die Schnittkurve von M mit $f = 0$ einen α-fachen Punkt in P id die von M mit $g = 0$ einen β-fachen, so kann man definieren

$$w_P(\varphi) = \alpha - \beta .$$

e Eigenschaften der Bewertung gelten wie oben. Solche Bewertungen nnen wir *Punktbewertungen* oder *Punktprimdivisoren*.

Man kann eine Punktbewertung in eine Kurvenbewertung verndeln, indem man durch eine birationale Transformation den Punkt in eine Kurve überführt. Man braucht nur die lineare Kurvenschar, e die rationale Abbildung definiert, so zu wählen, daß sie in P einen nfachen Basispunkt hat.

In ähnlicher Weise definiert auch jeder zu P unmittelbar benachrte Punkt P_1 (d. h. jede Tangentenrichtung von M in P) eine Bertung. Wenn nämlich die Schnittkurve von $f = 0$ mit M im Punkt einen α-fachen und im Nachbarpunkt P_1 einen α_1-fachen Punkt hat[5]), kann man definieren

$$w_1(f) = \alpha + \alpha_1 ,$$
$$w_1(\varphi) = w_1(f) - w_1(g) .$$

Durch die birationale Transformation, die P in eine Kurve $\mathfrak{P}$ verndelt, wird die Bewertung w_1 in eine Punktbewertung w_0 transrmiert, wo Q ein Punkt von $\mathfrak{P}$ ist. Transformiert man sodann Q eiter in eine Kurve $\mathfrak{Q}$, so kann man die Bewertung w_1 sogar in eine urvenbewertung verwandeln.

Analog gehören auch zu den höheren Nachbarpunkten von P Bertungen, die durch geeignete birationale Transformationen in höhere imdivisoren verwandelt werden können.

Im mehrdimensionalen Fall gibt es keine Theorie der unendlich nachbarten Punkte, Kurven usw., aber der Bewertungsbegriff gibt s einen vollwertigen Ersatz für diese fehlende Theorie. Wir definieren nfach:

Ein Primdivisor ist eine solche ganzzahlige Bewertung des Funkonenkörpers, in welcher die Konstanten den Wert Null haben und ren Restklassenring den Transzendenzgrad $n-1$ hat.

[5]) Für die Definition dieser Begriffe siehe meine Einführung in die algebr. eom., § 55.

Man kann leicht beweisen, daß alle solche Bewertungen sich birational in höhere Primdivisoren transformieren lassen, aber wir brauchen nicht einmal das. — Alle Primdivisoren, die nicht höhere Primdivisoren sind, heißen *niedere Primdivisoren*.

Die Werte $w(\varphi)$ sind zunächst nur für Funktionen φ des Körpers definiert. Wir wollen nun $w(f)$ auch für Formen $f(x_0, \ldots, x_n)$ definieren und schließlich auch $w(\mathfrak{D})$ für beliebige (höhere) Divisoren $\mathfrak{D}$.

Wir definieren zunächst eine teilweise Ordnung der Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ durch die Festsetzung: x_i ist früher als x_k, wenn $w(\xi_i^{-1}\xi_k) > 0$ ist. Wenn x_i früher ist als x_k und x_k früher als x_l, so ist auch x_i früher als x_l. Wir können nun die Numerierung des $x_0, \ldots, x_n$ so abändern, daß frühere x_i auch eine kleinere Nummer haben. Dann ist insbesondere $w(\xi_0^{-1}\xi_k) \geqq 0$ für alle x_k.

Nun definieren wir für jede Form $f(x_0, \ldots, x_n)$ vom Grade g:

$$w(f) = w\{\xi_0^{-g} f(\xi_0, \ldots, \xi_n)\} = w\left\{f\left(1, \frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right)\right\}$$

Die Definition ist unabhängig von der Wahl von x_0, solange nur die Bedingung erfüllt bleibt, daß kein x_k früher ist als x_0. Denn wenn man x_0 etwa durch x_1 ersetzt und weder x_1 früher ist als x_0 noch x_0 früher als x_1, so ist $w(\xi_0^{-1}\xi_1) = 0$, also $w\{\xi_0^{-g} f(\xi)\} = w\{\xi_1^{-g} f(\xi)\}$. Man hätte ξ_0 auch durch eine Linearkombination $\eta_0 = a_0\xi_0 + \cdots + a_n\xi_n$ ersetzen können, vorausgesetzt daß $w(\eta_0^{-1}\xi_k) \geqq 0$ für alle k und daher auch $w(\eta_0^{-1}\eta) \geqq 0$ für jede Linearkombination η von $\xi_0, \ldots, \xi_n$. Die Definition von $w(f)$ ist also projektiv invariant.

Noch einfacher wird die Definition von $w(f)$, wenn man durch die Normierung $\xi_0 = 1$ inhomogene Koordinaten einführt, was wir von jetzt an tun wollen. Dann ist nämlich jede Form $f(\xi)$ selber eine Funktion des Körpers und es ist

$$w(f) = w\{f(\xi)\}.$$

Vor der Normierung muß man sich aber davon überzeugen, daß die Bedingung $w(\xi_0^{-1}\xi_k) \geqq 0$ für alle k erfüllt ist.

Der so definierte Wert $w(f)$ ist offenbar niemals negativ. Diejenigen f, für die $w(f) > 0$ ist, bilden im Polynombereich von $x_0, \ldots, x_n$ ein Prim-H-Ideal, und zwar einen echten Teiler des die Mannigfaltigkeit M definierenden Primideals $\mathfrak{M}$. Die zu diesem Prim-H-Ideal gehörige irreduzible Mannigfaltigkeit N ist also ein echter Teil von M. Wir nennen N die *Nullmannigfaltigkeit der Bewertung* w. Sie hat die Eigenschaft, daß $w(f)$ größer oder gleich Null ist, je nachdem ob die Hyperfläche $f = 0$ sie enthält oder nicht.

Satz 4. *Wenn N die Dimension $d-1$ hat, so ist w der zu N gehörige höhere Divisor.*

Beweis: Es sei W der zu N gehörige höhere Divisor, also $W(fg^{-1}) = a - b$, wenn die Hyperflächen $f = 0$ und $g = 0$ aus M den

öchstteil N mit den Vielfachheiten a und b ausschneiden. Wir zeigen nächst: wenn $W(\varphi) \geqq 0$, so ist auch $w(\varphi) \geqq 0$, und wenn $W(\varphi) > 0$, nn auch $w(\varphi) > 0$.

Wenn $W(\varphi) \geqq 0$, so kann man nach Satz 1 die Funktion φ so als uotient fg^{-1} darstellen, daß die Hyperfläche $g = 0$ die Nullmannigltigkeit N nicht enthält. Dann ist $w(g) = 0$, also $w(fg^{-1}) = w(f) - w(g) \geqq 0$. Ist insbesondere $W(\varphi) > 0$, so enthält $f = 0$ die Nullannigfaltigkeit N, also ist $w(f) > 0$ und daher auch $w(fg^{-1}) > 0$. rsetzt man nun φ durch φ^{-1}, so folgt ebenso: ist $W(\varphi) \leqq 0$, so ist ıch $w(\varphi) \leqq 0$, und wenn $W(\varphi) < 0$, dann auch $w(\varphi) < 0$. Ist nun $V(\varphi) = 0$, so ist $w(\varphi)$ sowohl $\geqq 0$ als $\leqq 0$, also $= 0$. Also sind w nd W beide gleichzeitig positiv, Null oder negativ. Daraus folgt aber icht, daß die Bewertungen w und W äquivalent sind.

Die Umkehrung von Satz 4 ist trivial. Wir können also die höheren rimdivisoren auch charakterisieren als solche, deren Nullmannigfalgkeiten Höchstteile von M, die niederen als solche, deren Nullmangfaltigkeiten niedere Teile von M sind.

Nun zur Definition von $w(\mathfrak{D})$! Wir wählen einen beliebigen Punkt auf der Nullmannigfaltigkeit N des Primdivisors w. Zu jedem anzen Divisor $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1^{e_1}\mathfrak{P}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{P}_\mu^{e_\mu}$ auf M gibt es nach Severi[6]) eine yperfläche $f = 0$, die aus M den Höchstteil $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ausschneidet, wobei er Rest $\mathfrak{B}$ den Punkt P_0 und folglich die Mannigfaltigkeit N nicht nthält. Nun definieren wir

$$w(\mathfrak{A}) = w(f).$$

Die Definition ist von der Wahl der Hyperfläche $f = 0$ unabhängig. enn wenn $g = 0$ eine zweite ebensolche Hyperfläche ist, die den öchstteil $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ausschneidet, wobei $\mathfrak{C}$ wieder N nicht enthält, so können ir zunächst, indem wir eventuell unwesentliche Faktoren x_0^h hinzugen, f und g als Formen gleichen Grades annehmen. Dann ist $\varphi = fg^{-1}$ ne Funktion des Körpers und

$$w(f) = w(\varphi g) = w(\varphi) + w(g).$$

ır Funktion $\varphi = fg^{-1}$ gehört der Divisor

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C})^{-1} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}^{-1}.$$

in allgemeiner Punkt P von N ist weder in $\mathfrak{B}$ noch in $\mathfrak{C}$ enthalten. ach Satz 1 können wir also φ auch so als Quotient FG^{-1} darstellen, aß G und daher auch F nicht Null werden in P. Dann ist

$$w(\varphi) = w(F) - w(G) = 0,$$

ithin

$$w(f) = w(g).$$

[6]) F. Severi, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1933) S. 335 ff.

Die so definierte Funktion $w(\mathfrak{A})$ hat wieder die Eigenschaft, daß $w(\mathfrak{A}) > 0$ oder $= 0$, je nachdem ob der Höchstteil $\mathfrak{A}$ die Nullmannigfaltigkeit N enthält oder nicht. Weiter gilt offenbar

$$w(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = w(\mathfrak{A}) + w(\mathfrak{B}).$$

Wenn die Hyperfläche $f = 0$ genau den Hauptteil $\mathfrak{A}$ ausschneidet, so ist nach Definition $w(\mathfrak{A}) = w(f)$.

Für nichtganze Divisoren $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ definieren wir schließlich

$$w(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}) = w(\mathfrak{A}) - w(\mathfrak{B}).$$

Mit der ursprünglichen Bewertung $w(\varphi)$ ist diese erweiterte Bewertung $w(\mathfrak{D})$ in der Weise verknüpft, daß $w(\mathfrak{D}) = w(\varphi)$, wenn $\mathfrak{D}$ der zugehörige Divisor der Funktion φ ist, d. h. $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$, $\mathfrak{A}$ der Nulldivisor, $\mathfrak{B}$ der Poldivisor von φ.

Die Funktion $w(\mathfrak{D})$ bietet einen Ersatz für den Begriff der Vielfachheit einer Kurve in einem Punkt oder in einem unendlich benachbarten Punkt.

§ 5.

Virtuelle und effektive Multiplizitäten.

Es seien eine Anzahl *niedere* Primdivisoren $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ und dazu gewisse *Mindestwerte* oder *vorgegebene Multiplizitäten* $a_1, \ldots, a_r$ gegeben. Wir betrachten die Gesamtheit aller ganzen Divisoren, die in den Bewertungen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ mindestens die Werte $a_1, \ldots, a_r$ haben.

Diese Mindestwerte bedingen im allgemeinen andere als *Folgewerte*. Alle ebenen Kurven z. B., die in einem vorgegebenen Punkt P eine Vielfachheit $a \geqq 3$ haben, haben in allen den Bewertungen, die zu den Nachbarpunkten P_1 von P gehören, von selbst auch den Mindestwert 3; denn der Wert in der zu P_1 gehörigen Bewertung ist die Summe $a + b$ der Vielfachheiten in P und P_1, und aus $a \geqq 3$ folgt $a + b \geqq 3$[7]).

Wir definieren also: wenn alle ganzen Divisoren, die in $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die Mindestwerte $a_1, \ldots, a_r$ haben, in $\mathfrak{p}$ von selbst den Mindestwert a so heißt dieser Mindestwert ein *Folgewert* der vorgegebenen Mindestwerte. Alle diese (im allgemeinen unendlich viele) Folgewerte bilden zusammen ein *System von virtuellen Werten*.

Haben alle Divisoren einer linearen Schar in der Bewertung $\mathfrak{p}$ Werte $\geqq e$ und ist e das genaue Minimum dieser Werte, so heißt $e = e(\mathfrak{p})$ der *effektive Wert* der linearen Schar in der Bewertung $\mathfrak{p}$. Der effektive Wert kann auch definiert werden als das Minimum der

[7]) Ein anderes Beispiel: aus $a + b \geqq 3$ folgt $a \geqq 2$; denn die Kurven, die nicht durch P gehen, gehen auch nicht durch P_1, und die nur einfach durch P gehen, können auch nur einfach durch P_1 gehen.

erte der Basisdivisoren der Schar in der Bewertung $\mathfrak{p}$. Ist insbe-ndere $\mathfrak{p}$ ein höherer Primdivisor $\mathfrak{P}$, so enthalten alle Divisoren der har den gemeinsamen Faktor $\mathfrak{P}^e$.

Ist zu einer linearen Schar ein System von virtuellen Werten $v(\mathfrak{p})$ egeben und erfüllen alle Divisoren der Schar auch wirklich die Be-ngung, daß ihre Werte in der Bewertung $\mathfrak{p}$ mindestens $v(\mathfrak{p})$ be-agen, so ist $e(\mathfrak{p}) \geqq v(\mathfrak{p})$. Die Differenz $e(\mathfrak{p}) - v(\mathfrak{p})$ heißt die *Über-ultiplizität* oder der *Überwert* der Schar in der Bewertung $\mathfrak{p}$.

Beispiel. Die ebenen Kurven 3. Ordnung durch 8 gegebene Punkte $, \ldots, P_8$ gehen alle noch durch einen neunten Punkt P_9 (der auch einem der gegebenen unendlich benachbart sein kann). Betrachtet an nun die 8 zu $P_1, \ldots, P_8$ gehörigen Mindestwerte 1 und ihre Folge-erte als virtuelle Werte für das Kurvenbüschel, so hat das Büschel $P_1, \ldots, P_8$ keine Überwerte, aber in P_9 den Überwert 1.

Liegen aber von den 8 Punkten vier auf einer Geraden $\mathfrak{G}$, so ent-lten alle Kurven des Büschels diese Gerade als Bestandteil. Zu der ewertung $\mathfrak{G}$ gehört also der Überwert 1 und ebenso zu jedem Punkt n $\mathfrak{G}$, mit Ausnahme der 4 Punkte P_i auf $\mathfrak{G}$.

Im folgenden betrachten wir niemals eine lineare Schar allein, ndern immer eine lineare Schar mit einem System von virtuellen erten, wobei wir annehmen, daß die Divisoren der Schar ganz sind d mindestens diese Werte haben. Ein Divisor $\mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{D}\mathfrak{C}_\lambda$ der Schar steht aus einem festen Bestandteil $\mathfrak{D}$, der allen Divisoren der Schar emeinsam ist, und einem von λ abhängigen Bestandteil $\mathfrak{C}_\lambda$. Die irre-uziblen Bestandteile $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{D}$ haben, falls $\mathfrak{D}$ nicht 1 ist, positive fektive Multiplizitäten $e(\mathfrak{P})$; diese sind sämtlich als Übermultipli-zi-ten zu betrachten, denn virtuelle Werte $v(\mathfrak{p})$ gibt es nach der an-ngs gegebenen Definition nur für niedere, nicht für höhere Divisoren.

§ 6.

Transformation der linearen Scharen.

Eine lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ ohne feste Bestandteile ist definiert durch ne lineare Schar von Funktionen

$$\varphi_\lambda = \lambda_0 \varphi_0 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$$

folgender Weise: die zu φ_λ gehörigen Divisoren (φ_λ) werden zu-chst mit einem ganzen Divisor $\mathfrak{A}$ multipliziert, damit sie alle ganz erden, und dann mit $\mathfrak{B}^{-1}$, um sie von gemeinsamen festen Bestand-ilen zu befreien:

$$\mathfrak{C}_\lambda = (\varphi_\lambda)\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}.$$

igt man nun noch einen beliebigen festen Divisor $\mathfrak{D}$ als Faktor nzu, so erhält man die allgemeinste lineare Kurvenschar

$$\mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{C}_\lambda\mathfrak{D} = (\varphi_\lambda)\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D} = (\varphi_\lambda)\mathfrak{F}.$$

Zu dieser Kurvenschar sei wie oben ein System virtueller Werte gegeben. Wir wollen das Verhalten der Schar bei einer birationalen Transformation, die M wieder in eine glatte Mannigfaltigkeit M' überführt, untersuchen.

Ist ξ ein allgemeiner Punkt von M und ξ' ein allgemeiner Punkt von M', so sind die ξ' rationale Funktionen von den ξ und umgekehrt, also kann man jede rationale Funktion von den ξ' auch durch die ξ ausdrücken und umgekehrt, also entspricht jeder rationalen Funktion $\varphi(\xi)$ eindeutig und isomorph eine rationale Funktion $\varphi'(\xi')$. Auf Grund dieses Körperisomorphismus entspricht auch jeder Bewertung von M eine Bewertung von M' und umgekehrt. Dabei kommt es nur endlich oft vor, daß einem höheren Primdivisor von M ein niederer Primdivisor auf M' entspricht oder umgekehrt; denn nur endlich viele Primhöchstteile von M werden in niedere Teile von M' transformiert (vgl. wieder ZAG **6**, Math. Ann. 110, § 6), und zu jedem dieser Primhöchstteile gehört nach Satz 4 nur ein höherer Primdivisor.

Der linearen Funktionenschar (1) entspricht auf M' wieder eine lineare Funktionenschar

$$\varphi'_\lambda = \lambda_0 \varphi'_0 + \cdots + \lambda_r \varphi'_r$$

und dieser wieder eine lineare Divisorenschar ohne feste Bestandteile

$$\mathfrak{C}'_\lambda = (\varphi_\lambda)\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'^{-1}.$$

Am einfachsten ist die Transformation der linearen Schar $\{\mathfrak{D}_\lambda\}$ zu erklären, wenn diese *keine Überwerte*, also insbesondere auch keine festen Bestandteile $\mathfrak{D}$ hat. Dann ist $\mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{C}_\lambda$, und wir erklären die transformierte Schar ebenso als $\mathfrak{D}'_\lambda = \mathfrak{C}'_\lambda$, *ohne feste Bestandteile und ohne Überwerte*. Das heißt also, wir setzen die virtuellen Werte für die transformierte Schar $\mathfrak{D}'_\lambda = \mathfrak{C}'_\lambda$ gleich den effektiven Werten.

Etwas komplizierter wird die Transformationsregel, wenn Überwerte vorhanden sind. Das Prinzip ist, daß die Überwerte erhalten bleiben sollen:

$$e(\mathfrak{p}) - v(\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{p}') - v(\mathfrak{p}'), \tag{2}$$

wenn dem Primdivisor $\mathfrak{p}$ der Primdivisor $\mathfrak{p}'$ entspricht, gleichgültig ob es sich dabei um höhere oder um niedere Primdivisoren handelt; nur daß für die höheren $v(\mathfrak{P}) = 0$ zu setzen ist. Man verfährt demnach so: zunächst wird $\mathfrak{C}'_\lambda$ wie oben bestimmt. Sodann wird $\mathfrak{D}'$ zusammengesetzt aus denjenigen höheren Primdivisoren $\mathfrak{P}'$, denen vor der Transformation solche höhere oder niedere Primdivisoren $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{p}$ entsprechen, die in $\{\mathfrak{D}_\lambda\}$ einen Überwert haben, mit Exponenten gleich diesen Überwerten, damit (2) für diese $\mathfrak{P}'$ erfüllt ist. Solche Divisoren $\mathfrak{P}'$ gibt es nur endlich viele; denn es gibt nur endlich viele in $\mathfrak{D}$ aufgehende höhere $\mathfrak{P}$ und auch nur endlich viel niedere $\mathfrak{p}$, die bei der Transformation in höhere übergehen. Jetzt sind $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{C}'_\lambda$, also auch

$\mathfrak{D}'_\lambda = \mathfrak{C}'_\lambda \mathfrak{D}'$ bekannt und somit auch die effektiven Werte $e(\mathfrak{p}')$ für alle niederen Primdivisoren $\mathfrak{p}'$. Schließlich bestimmt man die virtuellen Multiplizitäten $v(\mathfrak{p}')$ so, daß (2) stets erfüllt ist.

Es kann vorkommen, daß die so definierte virtuelle Multiplizität $v(\mathfrak{p}')$ negativ ausfällt. Besteht z. B. die Schar $\{\mathfrak{D}_\lambda\}$ aus der einen Geraden $x_0 = 0$ in der Ebene mit den Punkten $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ als vorgeschriebene Basispunkte und wendet man die in der Einleitung angegebene CREMONA-Transformation an, so besteht die transformierte Schar nur aus dem Einheitsdivisor $\mathfrak{E}$, und der Punkt $(1, 0, 0)$, der der Geraden $x_0 = 0$ in der Transformation entspricht, hat die effektive Multiplizität $e(\mathfrak{p}') = 0$ und den Überwert $e(\mathfrak{p}') - v(\mathfrak{p}') = e(\mathfrak{p}) - 0 = 1$, also die virtuelle Multiplizität $v(\mathfrak{p}') = -1$.

Die negativen virtuellen Multiplizitäten werden durch den Begriff der Folgewerte, den wir am Anfang des § 5 zur Definition der virtuellen Werte verwendeten, nicht erfaßt: die Folgewerte sind ihrer Definition nach stets positiv oder Null. Wir müssen den Begriff des virtuellen Wertsystems also erweitern, indem wir außer den Systemen von Folgewerten $v(\mathfrak{p})$ auch noch solche Systeme von virtuellen Werten $v(\mathfrak{p}')$ zulassen, die durch birationale Transformation nach der obigen Vorschrift aus Systemen von Folgewerten $v(\mathfrak{p})$ hervorgehen. In § 7 werden wir die zulässigen Systeme von virtuellen Werten noch anders charakterisieren lernen.

Wir können die Definition der transformierenden Schar $\{\mathfrak{D}'_\lambda\}$ noch etwas anders formulieren. Setzt man nämlich wie oben

$$\mathfrak{D}_\lambda = (\varphi_\lambda) \cdot \mathfrak{F}$$

und entsprechend

$$\mathfrak{D}'_\lambda = (\varphi'_\lambda) \cdot \mathfrak{F}',$$

so wird der Divisor $\mathfrak{F}'$ direkt durch die Forderung bestimmt, daß für jeden höheren Divisor $\mathfrak{P}'$ die Forderung (2) der Erhaltung der Überwerte erfüllt sein soll, wobei natürlich $v(\mathfrak{P}') = 0$ zu setzen ist. Man kennt also für jedes $\mathfrak{P}'$ die effektive Vielfachheit, mit der $\mathfrak{P}'$ im Produkt $(\varphi'_\lambda) \cdot \mathfrak{F}'$ aufgehen muß, und da man auch (φ'_λ) kennt, so ist damit $\mathfrak{F}'$ bekannt.

Wenn eine einzelne Funktion φ_λ in einer (höheren oder niederen) Bewertung $\mathfrak{p}$ einen um k höheren Wert hat als den Mindestwert aller Funktionen φ_λ, so hat auch die transformierte Funktion φ'_λ für $\mathfrak{p}'$ einen um k höheren Wert als den Mindestwert aller Funktionen φ'_λ; denn der Wert von φ_λ in der Bewertung $\mathfrak{p}$ ist gleich dem von φ'_λ in der Bewertung $\mathfrak{p}'$.

Ebenso sieht man: wenn eine lineare Teilschar der Funktionenschar $\{\varphi_\lambda\}$ einen um k höheren Mindestwert hat als die ganze Schar, so gilt dasselbe für die transformierte Schar. Die Hinzufügung der von λ unabhängigen Faktoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ ändert daran nichts. Beim Übergang von den Scharen $\{\mathfrak{D}_\lambda\}$ und $\{\mathfrak{D}'_\lambda\}$ zu zwei sich entsprechenden

Teilscharen erhöhen sich also in (2) beide Seiten um denselben Betrag die v bleiben nämlich ungeändert und die e erhöhen sich beide um k. Daher gilt die Relation (2) auch für die Teilschar, sobald sie für die ganze Schar gilt. Damit ist bewiesen:

Satz 5. *Eine lineare Schar und eine Teilschar gehen wieder in eine lineare Schar und ihre entsprechende Teilschar über, wenn beide nach* (2) *transformiert werden.*

Durch diesen Satz wird erst klar, wie vernünftig die Transformationsvorschrift (2) ist.

Nach bekannten Schlüssen (vgl. etwa meine Einf. alg. Geom. § 46) ist jede lineare Schar in einer eindeutig bestimmten *Vollschar* enthalten, d. h. in einer solchen, die sich unter Beibehaltung der virtuellen Werte nicht mehr erweitern läßt. Nunmehr folgt aus Satz 5 unmittelbar die *Invarianz* des Begriffes der Vollschar:

Eine Vollschar geht bei der Transformation nach (2) *wieder in eine Vollschar über.*

§ 7.

Produkte und Quotienten von linearen Scharen.

Sind $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ und $\{\mathfrak{B}_\mu\}$ lineare Scharen:

$$\mathfrak{A}_\lambda = (\varphi_\lambda)\cdot\mathfrak{F};\quad \varphi_\lambda = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_r\varphi_r$$
$$\mathfrak{B}_\mu = \{\psi_\mu\}\cdot\mathfrak{G};\quad \psi_\mu = \mu_1\psi_1 + \ldots + \mu_s\psi_s$$

so ist die kleinste lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$, die alle Produkte $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\mu$ enthält, durch

$$\mathfrak{C}_\lambda = (\chi_\lambda)\mathfrak{F}\mathfrak{G}$$
$$\chi_\lambda = \lambda_1\varphi_1\psi_1 + \lambda_2\varphi_1\psi_2 + \ldots + \lambda_{rs}\varphi_r\psi_s$$

gegeben. Diese lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ heißt die *Produktschar* $\{\mathfrak{A}_\lambda\}\cdot\{\mathfrak{B}_\mu\}$. Als virtuelle Mindestwerte für die Produktschar gelten die Summen der virtuellen Werte der beiden Faktoren für jeden niederen Primdivisor $\mathfrak{p}$.

Jetzt wollen wir die *Restschar* einer Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ in Bezug auf eine Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ definieren. Wir wählen eine Kurve $\mathfrak{A}_0$ aus $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ willkürlich aus und setzen voraus, daß es in der Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ solche Divisoren $\mathfrak{C}$ gibt, die durch $\mathfrak{A}_0$ teilbar sind: $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$. Wenn das der Fall ist, so bilden die Divisoren $\mathfrak{B}$, die mit $\mathfrak{A}_0$ multipliziert Divisoren der Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ ergeben, eine lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}:\mathfrak{A}_0$. Diese Schar ist aber von der Wahl von $\mathfrak{A}_0$ unabhängig, denn wenn $\mathfrak{B}$ zu der Schar gehört, so ist nicht nur $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$, sondern die ganze lineare Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}$ in der Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ enthalten[8]). Die Schar der $\mathfrak{B}$ hängt somit nu

[8]) Wenn eine lineare Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda\}\mathfrak{B}$ mit einer Vollschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ ein Exempla $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$ gemeinsam hat, so ist sie ganz in der Vollschar enthalten.

on den Scharen $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ und $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ ab und wird als Quotient $\{\mathfrak{C}_\lambda\}:\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ der als *Rest* von $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ in Bezug auf $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ bezeichnet. Als virtuelle Werte der Quotientenschar werden die Differenzen der virtuellen Werte er Scharen $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ und $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ genommen. Die Quotientenschar kann auch efiniert werden als die umfassendste Schar $\{\mathfrak{B}_\mu\}$, deren Produkt mit $\mathfrak{A}_\lambda\}$ eine Teilschar von $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ ergibt. Sie ist offensichtlich wieder eine ollschar.

Satz 6. *Jede Vollschar läßt sich als Quotient von zwei Vollscharen hne Überwerte darstellen.*

Beweis. Zunächst seien die virtuellen Werte $v(\mathfrak{p})$ der Vollschar $\mathfrak{B}_\mu\}$ nach § 5 als Folgewerte von irgendwelchen vorgegebenen Mindest-erten definiert. Die Formen F, die in allen Bewertungen $\mathfrak{p}$ mindestens ie Werte $v(\mathfrak{p})$ haben, bilden ein H-Ideal, das nach dem Hilbertschen asissatz eine endliche Basis $(F_1, \ldots, F_r)$ besitzt. Für jedes $\mathfrak{p}$ sind lle Werte $w(F_1), \ldots, w(F_r)$ mindestens gleich $v(\mathfrak{p})$. Wir wollen zeigen, aß das Minimum $v(\mathfrak{p})$ wirklich erreicht wird:

1) $$\text{Min}\,\{w(F_1), \ldots, w(F_r)\} = v(\mathfrak{p}).$$

Nach der Definition des Begriffes Folgewert ist $v(\mathfrak{p})$ das Minimum er Werte $w(\mathfrak{A})$ für alle Divisoren $\mathfrak{A}$, die die vorgegebenen Mindest-erte haben. Also ist $v(\mathfrak{p}) = w(\mathfrak{A})$ für ein geeignetes solches $\mathfrak{A}$. Nach er Definition von $w(\mathfrak{A})$ aber (§ 4) ist $w(\mathfrak{A})$ gleich einem geeigneten (F), wo F ebenso wie $\mathfrak{A}$ mindestens die vorgeschriebenen Mindest-erte hat, also dem H-Ideal angehört. Wären nun alle $w(F_1), \ldots, w(F_\mu)$ rößer als $v(\mathfrak{p})$, so wäre auch $w(\mathfrak{A})$ größer als $v(\mathfrak{p})$, was nicht geht. lso ist (1) richtig.

(1) gilt übrigens nicht nur für niedere, sondern auch für höhere rimdivisoren, nur daß dann natürlich $v(\mathfrak{p}) = 0$ ist.

Die Formen $G(x)$, deren Durchschnitte mit M den Divisor $\mathfrak{B}_0$ als aktor enthalten, bilden wieder ein H-Ideal mit einer endlichen Basis $G_1, \ldots, G_s$). Man beweist wie oben, daß

2) $$\text{Min}\,\{w(G_1), \ldots, w(G_s)\} = w(\mathfrak{B}_0)$$

ür jeden Primdivisor $\mathfrak{p}$ gilt.

Nun sei m das Maximum der Gradzahlen von $F_1, \ldots, F_\mu, G_1, \ldots, G_s$. ann gibt es zu jedem $\mathfrak{p}$ in jedem der beiden vorhin erwähnten H-Ideale ormen F oder G vom Grade m, für welche gilt

3) $$w(F) = v(\mathfrak{p})$$

4) $$w(G) = w(\mathfrak{B}_0)$$

Die Formen F vom Grade m, die in allen Bewertungen $\mathfrak{p}$ mindestens ie Werte $v(\mathfrak{p})$ haben, schneiden aus M eine lineare Schar $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ aus, eren effektiver Mindestwert für jedes $\mathfrak{p}$ genau gleich dem virtuellen (p) ist, also eine lineare Schar ohne Überwerte. Ebenso schneiden

die Formen G vom Grade m, die durch $\mathfrak{B}_0$ teilbar sind, aus M ein lineare Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_0\}$ aus, deren effektiver Mindestwert für jedes $\mathfrak{p}$ gleic $w(\mathfrak{B}_0)$ ist. Läßt man den festen Bestandteil $\mathfrak{B}_0$ aus dieser Schar weg so bleibt die Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ übrig, deren effektive Mindestwerte demnach Null sind. Setzt man die virtuellen Mindestwerte dieser Schar auch Null, so hat man wieder eine Schar ohne Überwerte.

Nun ist aber klar, daß die Schar $\{\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_0\}$ als Teilschar in $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ ent halten ist. Die Quotientenschar $\{\mathfrak{C}_\lambda\} : \{\mathfrak{A}_\lambda\}$ enthält also $\mathfrak{B}_0$, hat dieselben virtuellen Werte wie $\{\mathfrak{B}_\mu\}$ und ist daher mit der Vollschar $\{\mathfrak{B}_\mu\}$ identisch Damit ist Satz 6 für diesen Fall bewiesen.

Sind nun zweitens die virtuellen Werte $v(\mathfrak{p})$ nicht als Folgewerte sondern nach § 6 durch Transformation definiert, so kann man vo der Transformation den eben dargestellten Beweis geben. Das Er gebnis ist birational invariant, gilt also auch nach der Transformation

Auf Grund von Satz 6 läßt sich jedes zulässige System von virtuellen Werten darstellen als Differenz zweier Systeme von effektiven Werten von wirklichen linearen Scharen ohne feste Bestandteile. Diese Charakterisierung der virtuellen Wertsysteme ist birational invariant

§ 8.

Virtuelle Vollscharen und Divisorenklassen.

Eine Vollschar $|\mathfrak{A}|$ ist bestimmt durch einen ganzen Divisor $\mathfrak{A}$ und ein System von virtuellen Werten $u(\mathfrak{p})$, wobei $\mathfrak{A}$ mindestens diese Werte $u(\mathfrak{p})$ haben muß:

$$w(\mathfrak{A}) \geqq u(\mathfrak{p}) \qquad \text{für jedes } \mathfrak{p}$$

Zwei Vollscharen $|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$ werden multipliziert, indem man die Repräsentanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ multipliziert und die virtuellen Werte $u(\mathfrak{p})$, $v(\mathfrak{p})$ addiert. Die Division ist nur dann möglich, wenn der Quotient $|\mathfrak{A}| : |\mathfrak{B}|$ existiert; dann ist sie aber eindeutig. Die Vollscharen bilden also eine Abelsche Halbgruppe.

Man kann diese Halbgruppe leicht zu einer Gruppe erweitern, in dem man formal Brüche einführt, mit den üblichen Festsetzungen

$$(1) \qquad \frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{B}|} = \frac{|\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{D}|}, \text{ wenn } |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{D}| = |\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{C}|$$

$$(2) \qquad \frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{B}|} \cdot \frac{|\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{D}|} = \frac{|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{C}|}{|\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{D}|}$$

$$(3) \qquad \frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{B}|} = |\mathfrak{C}|, \text{ wenn } |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{C}|$$

Diese Brüche nennt man *virtuelle Vollscharen*. Eine virtuelle Vollschar ist demnach bestimmt durch einen gebrochenen Divisor $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-}$ und ein System von virtuellen Werten, die Differenzen der virtuellen Werte der Zähler- und Nennerschar. Dabei darf der gebrochene Divisor

$\mathfrak{B}^{-1}$ durch jeden äquivalenten Divisor $\mathfrak{C}\mathfrak{D}^{-1}$ ersetzt werden: zwei visoren $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ heißen bekanntlich äquivalent, wenn ihr Quotient $\mathfrak{F}\mathfrak{G}^{-1}$ r Divisor einer Funktion φ des Funktionenkörpers ist. Die virtuellen erte der virtuellen Vollschar aber dürfen nicht durch andere ersetzt rden: ändert man sie, so erhält man eine andere virtuelle Vollschar. as alles folgt leicht aus der Gleichheitsdefinition (1).

Rechnet man alle zu einem (gebrochenen) Divisor $\mathfrak{F}$ äquivalenten visoren zu einer *Divisorenklasse*, so kann man das Gesagte auch ausdrücken: *Eine virtuelle Vollschar ist bestimmt durch eine Divisorenasse und ein System virtueller Werte.* Das System virtueller Werte dabei nicht willkürlich, sondern es muß sich als Differenz von zwei stemen effektiver Mindestwerte von wirklichen Vollscharen ohne erwerte darstellen lassen. Aus Satz 6 folgt nämlich, daß jede virelle Vollschar sich als Quotient von effektiven Vollscharen ohne erwerte darstellen läßt:

$$\frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{B}|} = \frac{|\mathfrak{C}| : |\mathfrak{D}|}{|\mathfrak{G}| : |\mathfrak{H}|} = \frac{|\mathfrak{C}| \cdot |\mathfrak{H}|}{|\mathfrak{D}| \cdot |\mathfrak{G}|},$$

o $|\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{D}|$, $|\mathfrak{G}|$, $|\mathfrak{H}|$ effektive Vollscharen ohne Überwerte sind.

Der Begriff der Divisorenklasse ist nicht birational invariant, wohl er der Begriff „virtuelle Vollschar".

(Eingegangen am 5. März 1945.)

Die Grundlehren der
Mathematischen Wissenschaften

In Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von
W. Blaschke · R. Grammel · E. Hopf · F. K. Schmidt · B. L. van der Waerden

Band II: **Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.** Von Dr. K. Knopp, ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen. Vierte Auflage 1947. Mit 14 Textfiguren. XII, 583 Seiten. M 39.60

Band LII: **Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik.** Von Dr. W. Magnus, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen und Dr. F. Oberhettinger, Dozent für Mathematik an der Universität Mainz. Zweite Auflage 1948. VIII, 230 Seiten. M 24.60

Band LIII: **Rechenmethoden der Quantentheorie dargestellt in Aufgaben und Lösungen.**

I. Teil: Elementare Quantenmechanik. Von Dr. S. Flügge, ord. Professor an der Universität Marburg, unter Mitarbeit von Dr. H. Marschall, Marburg. Mit 18 Abbildungen. 1947. X, 240 Seiten. M 18.—

Band LIV: **Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch.** Von Professor Dr. G. Doetsch. Mit 9 Figuren. 1947. VIII, 185 Seiten. M 18.—

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch
A. Clebsch und C. Neumann

Fortgeführt durch

F. Klein — D. Hilbert
O. Blumenthal — E. Hecke

Gegenwärtig herausgegeben von

H. Behnke
Münster/Westf.

R. Courant
New York

H. Hopf
Zürich

K. Reidemeister
Marburg/Lahn

F. Rellich
Göttingen

B. L. van der Waerden
Laren, N.-Holland

Erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von rund 50 Bogen vereinigt werden.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

KONFORME ABBILDUNG

Von

Dipl.-Ing., Dr. phil. **A. Betz**

Direktor des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung
und Professor an der Universität Göttingen

Mit 276 Bildern. VIII, 359 Seiten. 1948

M 36.—

Inhaltsübersicht

Einführung und einfache Beispiele. — Elektrische Stromfelder. — Weitere Beispiele und Folgerungen. — Allgemeine Erkenntnisse. — Auftreten der konformen Abbildung in anderen Gebieten der Physik. — Zusammenhang der konformen Abbildung mit der Theorie der komplexen Funktionen. — Abbildung durch die gebräuchlichsten einfachen Funktionen. — Einige zusammengesetzte Funktionen. — Behandlung gegebener Abbildungsaufgaben. — Doppelperiodische Felder. — Freie Strahlen. — Übersicht über die wichtigsten behandelten Abbildungen. — Namen- und Sachverzeichnis.

Kurvenintegrale
und
Begründung der Funktionentheorie

Von

Dr. **L. Heffter**

Professor an der Universität Freiburg i. B.

Mit 7 Textfiguren. IV, 48 Seiten. 1948

M 5.40

Inhaltsübersicht

Vorkenntnisse aus der Theorie der reellen Funktionen. — Stetige rektifizierbare ebene Kurven. — Das Kurvenintegral $\int_{a,\alpha}^{b,\beta} (f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy)$. — Kurvenintegral und Stieltjes-Integral. — Der reelle Cauchysche Integralsatz. — Funktionen einer komplexen Veränderlichen. — Angaben über Originalliteratur mit erläuternden Bemerkungen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter Zulassung Nr. 100 der Britischen Militärregierung.
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.
Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany